Novosibirsk State Technical University

Algebra and Model Theory *9*

Collection of papers
edited by A.G. Pinus, K.N. Ponomarev,
S.V. Sudoplatov and E.I. Timoshenko

Novosibirsk
2013

UDC 512(06)
A 35

A 35 **Algebra and Model Theory 9:** Collection of papers/ Edited by A.G. Pinus, K.N. Ponomarev, S.V. Sudoplatov and E.I. Timoshenko. — Novosibirsk: NSTU Publisher, 2013. — 169 pp.

ISBN 978–5–7782–2350–9

The papers in this book are devoted to some problems of algebra and model theory.

Technical editor I.D. Chernykh.

UDC 512(06)

Introduction

Algebra and Model Theory 9

The 10th International Summer School "Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory —- Erlagol 2013" was held 25–29 of June 2013 in the camping center "Erlagol" in Altai mountains. The School was organized by Algebra and Mathematical Logic Department of Novosibirsk State Technical University (NSTU) and by Sobolev Institute of Mathematics SB RAS. Professors Victor D. Mazurov, Alexandr G. Pinus and Evgeny I. Timoshenko were the chairmen of Organizing Committee of School. Professors Alexandr V. Mikhalev, Evgeniy A. Palyutin, Konstantin N. Ponomarev, Vladimir N. Remeslennikov, Vitaliy A. Roman'kov, Sergey V. Sudoplatov and Associate Prof. Evgeny N. Poroshenko were the members of Organizing Committee.

The School was supported by RFBR (grant № 13-01-06028) and by grant of NSTU, having a special purpose.

The Collection of Papers is composed by some articles of the participants of School, being connected with the subject of School.

Erlagol 2013

10$^{\text{th}}$ International Summer School-Conference
"Problems Allied to Universal Algebra
And Model Theory"
(June, 24-30)

June, 25

Plenary talks. Chairman Sergey V. Sudoplatov

Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Prof. V. D. Mazurov (*Novosibirsk, Russia*).

Periodic Groups with Given Orders of Elements.

Prof. E. I. Timoshenko (*Novosibirsk, Russia*).

Systems of Elements Preserving Measure on Varieties of Groups.

Prof. V. G. Puzarenko (*Novosibirsk, Russia*).

Computability on Admissible Sets.

Short Talks

Chairman Vadim G. Puzarenko

A. K. Koshcheeva (*Izhevsk, Russia*).

New Logical Constants in Pretabular Superintuitionistic Logics.

F. A. Dudkin (*Novosibirsk, Russia*).

On Embeddings of Baumslag–Solitar Groups into GBS-groups.

I. B. Gorshkov (*Novosibirsk, Russia*).

Recognizability of Symmetric Groups by Set of Element Orders.

V. Yu. Gubarev (*Novosibirsk, Russia*).

Functor "Cover" and its Applications.

D. A. Zhinzhilov (*Omsk, Russia*).

On Associative Rings with Boolean Algebra of Stable Tolerances.

June, 26

Plenary talks. Chairman Evgeniy I. Timoshenko

Academician of the Russian Academy of Sciences, Prof. Yu. L. Ershov (*Novosibirsk, Russia*).

Valuation of Fields (Hensel's Lemma, Krasner's Lemma, etc.).

Prof. S. V. Sudoplatov (*Novosibirsk, Russia*).

Algebras of Distributions for Semi-Isolating Formulas of a Complete Theory.

R. A. Popkov (*Novosibirsk, Russia*).

Classification of Countable Models of Complete Theories with Continuum Many Types.

Short Talks

Chairman Fedor A. Dudkin

Dr. I. V. Starikova (*Bristol, Great Britain*).

Groups and Graphs: Some Philosophical Aspects.

Dr. T. K. Vinogradova (*Saint-Petersburg, Russia*).

(1) On Non-Smooth Optimization Problems.

(2) "Not Only about Lobachevsky".

Dr. D. Yu. Vlasov (*Novosibirsk, Russia*).

Binding of Types as a Method of Combining Logics.

D. M. Smelyanskiy (*Moscow, Russia*).

On Models of Second Order Theories. Some Criteria of Completeness.

Dr. A. V. Zenkov (*Barnaul, Russia*).

Representations of m-groups.

June, 28

Plenary talks. Chairman Victor D. Mazurov

Prof. A. P. Pozhidaev (*Novosibirsk, Russia*).

RLT-algebras, Filippov Algebras, and Poisson Algebras

Dr. V. A. Churkin (*Novosibirsk, Russia*).
Crystallographic Groups of Motions of Pseudo-Euclidean Space $\mathbb{R}^{3,3}$.

Prof. L. A. Sholomov (*Moscow, Russia*).
Disjunctive and selective matrices.

Short Talks

Chairman Alexander P. Pozhidaev

Dr. L. N. Pobedin (*Novosibirsk, Russia*).
Generalized Computability in Classical and Alternative Infinity.

Dr. A. M. Popova (*Novosibirsk, Russia*).
Automorphism Group of the Ring ZS_4.

Dr. E. V. Grachev (*Novosibirsk, Russia*).
Significative Points of Triangulations of Three-Component Systems.

A. V. Men'shov (*Omsk, Russia*).
On Systems of Equations in Free Abelian Groups.

Yu. A. Mikhal'chishina (*Novosibirsk, Russia*).
Local Representations of Braid Group

June, 29

Day of Problems

Presented by Yu. L. Ershov, V. D. Mazurov, E. I. Timoshenko, S. V. Sudoplatov, V. G. Puzarenko, V. A. Churkin.

Part I
Articles

SEMANTIC NETWORKS AND THE THEORY OF INSTITUTIONS

Maria Dimarogkona (1,2) **Petros Stefaneas** (1)

(1) National Technical University of Athens,
Department of Mathematics,
Heroon Polytechniou 9, 15780 Zografou, Greece;
(2) University of Amsterdam,
P.O. Box 19268 1000 GG Amsterdam, The Netherlands
e-mail: marie.dima@gmail.com e-mail: petros@math.ntua.gr

1 Semantic Networks

Semantic networks can be described as a tool for representing knowledge. In this sense, a semantic network is a diagrammatic representation consisting of boxes, arrows and labels which reflects a way of thinking about knowledge, namely, that it is organized in concepts and relations between them. These diagrams are directed graphs, in which each node represents a concept, or a proposition, and each arrow a relation between concepts, or propositions, which is sometimes designated by an appropriate label. These relations are of primary importance, because they offer the basic structure for the organization of knowledge, and they are chosen depending on the application for which a network is created. Thus, semantic networks represent propositional information, and they come in different types depending on the semantic relations that they employ. We should also mention here that apart from knowledge representation, they are also used to support automatic systems of reasoning. As external computer representations, they allow functions similar to those of a data base, as well as correct inference. This is achieved through the use of algorithms applied on internal realizations of semantic networks, which are handled by an interpreter.

To give an example, *definitional networks* constitute a type of semantic networks which focuses on the *subtype,* or *is-a,* relation between a concept type and a defined subtype. The first such network, which is also the most ancient known semantic network, was designed in the third century CE by the Greek philosopher Porphyry in the context of his commentary on Aristotle's *Categories.* With it he attempted to explain the method used by Aristotle to define his categories by determining the *genus* or *general type* and the *differentia* which distinguishes different subtypes (*species*) of the same super-type (*genus*). The first realizations of such networks were used to define concept types and relation patterns for mechanical translation systems; Margaret Masterman's system [8] was the first to be called a semantic network. Among contemporary systems, descriptive logics constitute extensions of the features of Porphyry's tree. The latter, as well as many types of descriptive logical systems, are subsets of classical first-order logic. They belong to the class of monotone logical systems, in which new information always leads to a monotonic growth of the number of provable theorems, and no part of the old information can ever be deleted, or modified. Two recent descriptive logical systems are DAML and OIL, which are used for the representation of knowledge in the semantic web.

Implicational networks are another type of semantic networks which focuses on the relation of implication - as its name reveals -, and is used to support automatic reasoning systems. Depending on the way in which such systems handle implication, the corresponding networks can be designated as belief networks, causal networks, Bayesian networks, or truth-maintainance systems. Chuck Rieger [5], for example, developed a version of causal networks which he used to analyze problem descriptions in english and translate them into a network which could support meta-reasoning. Judea Pearl [6],[7] - on the other hand -, who developed techniques for the application of statistics and probabilities in the field of artificial intelligence, introduced belief networks, which are causal networks on whose arrows probabilities are added as labels. In fact, sometimes different methods of reasoning can be applied to the same basic graph with the addition of labels which indicate truth-values or probabilities.

The most common among these methods are logical reasoning and probabilistic reasoning. Methods of logical implication are mainly used in truth-maintainance systems (TMS) [9]. A TMS begins from nodes whose truth-value is known, and spreads in the whole network, combining forward and backward reasoning. Due to its nature, it can be used for the verification of the network's consistency, the search for contradictions, or the finding of positions where the network can be modified with the addition, or deletion, of nodes. The result is a kind of non-monotonic reasoning called *belief revision*. A big part of the forward and backward reasoning of a TMS can be adjusted to a probabilistic interpretation, since truth and falsity can be thought of as probabilities with values 1.0 and 0.0 respectively. But the continuous field of probabilities from 0.0 to 1.0 requires finer interpretations and computations of a higher complexity. Pearl (2000), among others, studied extensively probabilistic logic in belief and causal networks.

Finally, we should not fail to mention that although implicational networks focus on the relation of implication, they are capable of expressing all dyadic connectives by allowing a conjunction of inputs and a disjunction of outputs in a propositional node. Gentzen [10] has shown that a collection of implications of this form - called *sequents* - can express all of propositional logic.

Semantic networks appeared for the first time as a means for the conceptual analysis of language, and only later did they develop into a tool for the representation of knowledge, and the construction of automatic systems of inference. Their formal aspects are — as we have seen — almost identical with those of traditional logical systems, and in terms of expressiveness they are equivalent to first-order logic[1][2]. Thus, it seems that what is special about them is that they use a graphic notation.

It has been argued that this graphic notation is an advantage of semantic networks over symbolic logic, because it allows for all the information about an entity to be stored in one node, and indicates the information relevant to it through arrows directly connected to this node. To the contrary, in the case of logical notation, the scattering of information not only destroys the readability of the formula, but also obscures the semantic structure of the sentence from which it derived. This argument is only a part of another, more complicated one, which concerns the nature of semantics and how different notations can lead to different systems with different pragmatic uses. Graphic notation is also thought to have heuristic value, as it helps the readers discover patterns which would be difficult, if not impossible, to detect using linear notation. Finally, it seems that its main advantage is its ability to present direct connections clearly, while linear notation must be based on repeated appearances of variables or names.

2 The Theory of Institutions

The theory of institutions was developed in the context of computer science, but the scope of its applications has grown much wider to include even art, like music and theatre. According to Joseph Goguen - who introduced it together with Rod Burstall - the purpose of this theory was to systematically study general properties of logics, including the representation, implementa-

[1]Simple semantic networks can be appropriately extended so that they can express the same logical information with first-order logic [17], while every semantic network can be converted into a set of first-order formulas.

tion, and translation of logics, by formalizing the notion of "a logical system" using elegant categoric-theoretical constructions called *institutions* [3]. The idea of creating such a theory was directly relevant to the state of computer science at the time; an enormous diversity of different logics were used in it, which naturally led to a need for a way of bringing "an order to that chaos". Goguen and Burstall responded to this by developing the theory of institutions.

Definition. *An institution I consists of*

1. a category **Sign**, whose objects are called signatures and whose arrows are called signature morphisms.
2. A functor $\mathbf{Sen} : \mathbf{Sign} \longrightarrow \mathbf{Set}$, giving to each signature a set whose elements are called sentences over that signature,
3. a functor $\mathbf{Mod} : \mathbf{Sign} \longrightarrow \mathbf{Cat^{op}}$ giving for each signature Σ a category whose objects are called
$\Sigma - models$, and whose arrows are called $\Sigma - (model)$ morphisms, and
4. a relation $\vDash_\Sigma \subseteq |\mathbf{Mod}(\Sigma)| \times \mathbf{Sen}(\Sigma)$ for each $\Sigma \in |\mathbf{Sign}|$, called Σ-satisfaction, such that for each signature morphism $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$,the Satisfaction Condition

$$m' \vDash_\Sigma Sen(\phi)(e) \text{ iff } Mod(\phi)\left(m'\right) \vDash_\Sigma e$$

holds for each $m' \in |Mod\left(\Sigma'\right)|$ and each $e \in Sen(\Sigma)$.

Every logical system consists of two basic elements: its syntax and its semantics, namely, its syntactical features and the meaning of its symbols. These two elements, although of a different nature, are linked by the satisfaction relation. Model theory, which combines abstract algebra and logic, studies the relation between a formal language and its interpretations, or models. But while traditional model theory supposes a stable vocabulary (usually some first-order language), the notion of an institution allows us to consider many different vocabularies simultaneously. An institution consists of a category of signatures (the various vocabularies) such that associated with each signature are sentences, models, and a relationship of satisfaction that, in a certain sense, is invariant under change of signature. Two familiar examples of this set-up are equational logic and first-order logic (or model theory). In equational logic, a signature Σ declares the function symbols that are available, Σ-sentences are equations using these function symbols, and Σ-models are Σ-algebras. In first-order logic signatures in addition give relation symbols, sentences are the usual first-order sentences, and models are the usual first order structures. In both cases satisfaction is the familiar relation.

The essence of the institution notion is, according to Goguen and Burstall, that a change in signature (by using a signature morphism) induces "consistent" changes in sentences and models in a sense made precise by the Satisfaction Condition. This goes a step beyond Tarski's classic "semantic definition of truth"[4], and also generalizes Barwise's "Translation Axiom". The wide range of consequences, and the fact that even for equational logic the Satisfaction Condition is not entirely trivial, suggested to Burstall and Goguen that this step has some substance. Moreover, it is a basic and familiar fact that the truth of a sentence (in logic) is independent of the symbols chosen to represent its functions and relations. In other words, it is a basic and familiar fact that - in logic - *truth is invariant under change of notation*, and it is this fact that the Satisfaction Condition was designed to reflect. In this way, institutions allow us to study the general structure of the various formal languages, without taking into account their syntactic and semantic differences.

A number of logical systems have been shown to satisfy the definition given above including equational logic, first order logic, Horn-clause logic, Horn-clause logic with equality, and first order logic with equality. For the present purposes we will present, in some detail, a sketch of the proof for the case of many-sorted first-order logic.

Theorem 1. *(Many-sorted) first-order logic is an institution.*

Proof. (Sketch) The first we need to do is define the category of first-order signatures **FoSig**.

A first-order signature Ω is a triple $\langle S, \Sigma, \Pi \rangle$ where

S is a set (of sorts),

Σ is an $S^* \times S$-indexed family of sets (of operator or function symbols), and

Π is an S^*-indexed family of sets (of predicate or relation symbols), where S^* is the Kleene start of S: $S^* = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} S_i$, $S_0 = \{\lambda\}$ (the empty string), $S_1 = S$, and $S_{i+1} = \{ws | w \in S_i \ \wedge s \in S\}$ where $i > 0$.

A morphism of first order signatures $\phi : \Omega \rightarrow \Omega'$, is a triple $\langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle$ where

$\phi_1 : S \longrightarrow S'$ is a function,

$\phi_2 : \Sigma \rightarrow \Sigma^{'}$ is an $S^* \times S$-indexed family of functions $(\phi_2)_{u,s} : \Sigma_{u,s} \rightarrow \Sigma^{'}_{\phi_1^*(u),\phi_1(s)}$ and

$\phi_3 : \Pi \rightarrow \Pi^{'}$ is an S^*-indexed family of functions $(\phi_3)_u : \Pi_u \rightarrow \Pi^{'}_{\phi_1^*(u)}$.

Thus the objects of the category **FoSig** are first order signatures, and its morphisms are first order signature morphisms.

Next, we have to define the category **FoMod** which has first order models as its objects, and first-order morphims as its morphisms.

For a first-order signature Ω, an Ω-model (or Ω-structure) A consists of

an S-indexed family $|A|$ of non-empty sets $\langle A_s | s \in S \rangle$, where A_s is called the carrier of sort s, and

an $S^* \times S$-indexed family α of functions $\alpha_{u,s} : \Sigma_{u,s} \rightarrow [A_u \rightarrow A_s]$ assigning a function to each function symbol, and an S^*-indexed family β of functions $\beta_u : \Pi_u \rightarrow Pow\,(A_u)$ assigning a relation to each predicate symbol, where $Pow\,(A)$ denotes the set of subsets of A.

For $\pi \in \Pi_u$ with $u = s_1 ... s_{\mathrm{n}}$ and $a_i \in A_{s_i}$ for $i = 1, ..., n$ we say that "$\pi\,(a_1, ..., a_n)$ holds" (in A) iff $(a_1, ..., a_n) \in \beta\,(\pi)$.

A first-order Ω-homomorphism $f : A \rightarrow A'$ of $\Omega-models$ is an S-indexed family of functions $f_s : A_s \rightarrow A^{'}_s$ such that the homomorphism condition holds for Σ, and such that for $\pi \in \Pi_u$ with $u = s_1 ... s_n$ and with $a_i \in A_{s_i}$ for $i = 1, ..., n$

$$\beta\,(\pi)\,(a_1, ..., a_n) \implies \beta\text{'}(\pi)\,(f_{s_1}\,(a_1)\,, ..., f_{s_n}\,(a_n)).$$

FoMod, which has Ω-models as objects and first order Ω-homomorphisms as morphisms, extends to a functor **FoMod** :**FoSig** $\rightarrow$ $\mathbf{Cat^{op}}$ as follows:

Given a first-order signature morphism $\phi : \Omega \rightarrow \Omega'$, define the functor

$$FoMod\,(\phi) : FoMod\,(\Omega') \rightarrow FoMod\,(\Omega)$$

to send: first of all, $A^{'}$ in $|FoMod\left(\Omega^{'}\right)|$ to $A = \phi A^{'}$ defined by

$A_s = A^{'}_{s^{'}}$ for $s \in S$ with $s^{'} = \phi_1\,(s)$,

$\alpha_{u,s}\,(\sigma) = \alpha^{'}_{u^{'},s^{'}}\left((\phi_2)_{u,s}\,(\sigma)\right)$ for $u \in S^*$, $s \in S$ and $\sigma \in \Sigma_{u,s}$ where $u^{'} = \phi_1^*\,(u)$ and $s^{'} = \phi_1\,(s)$,

$\beta_u\,(\pi) = \beta^{'}_{u^{'}}\,((\phi_3)_u\,(\pi))$ for $u \in S^*$ and $\pi \in \Pi_u$ with $u^{'}$ as above;

and secondly, to send $f^{'} : A^{'} \rightarrow B^{'}$ in $FoMod\left(\Omega^{'}\right)$ to $f = \phi f^{'} : A \rightarrow B$ in $FoMod\,(\Omega)$, where $A = \phi A^{'}$ and $B = \phi B^{'}$, defined by $f_s = f_{s^{'}}$ where $s^{'} = \phi_1\,(s)$. It is easy to see that this construction does indeed give a functor.

The next step is to define the sentences over a first-order signature Ω, which is done the usual way, by first defining terms and formulas. For the variables, let $\mathcal{X}$ be a fixed infinite set of variable symbols, and let $X : \mathcal{X} \to S$ with $X^{-1}(s)$ infinite for any $s \in S$ be a partial function, i.e. sort assortment; X also denotes the S-indexed set with $X_s = \{x \in \mathcal{X} | X(x) = s\}$. Finally, an Ω-sentence is defined to be a closed Ω-formula. If we let **FoSen** (Ω) denote the set of all Ω-sentences, and we additionally define the effect of $FoSen$ on first order signature morphisms, we get the functor **FoSigSen** : **FoSig** $\to$ **Set**, which gives for each signature Ω the set of all sentences which can be defined on it.

Now in order to show that first-order logic is an institution, it remains to define the satisfaction relation and to verify the Satisfaction Condition.

Given a sentence P, define $Asgn_X(A, P)$, the set of assignments in A for which P is true inductively as follows:

if $P = \pi(t_1, ..., t_n)$ then $f \in Asgn_X(A, P)$ iff $\left(f^{\#}(t_1), ..., f^{\#}(t_n)\right) \in \beta(\pi)$, where $f^{\#}(t)$ denotes the evaluation of Σ-term t in the Σ-algebra part of A with the values of variables given by the assignment f using initially:

$Asgn_X(A, true) = Asgn_X(A)$

$Asgn_X(A, \neg P) = Asgn_X(A) - Asgn_X(A, P)$

$Asgn_X(A, P \& Q) = Asgn_X(A, P) \cap Asgn_X(A, Q)$

$Asgn_X(A, (\forall x) P) = \{f | Asgn_X(A, f, x) \subseteq Asgn_X(A, P)\}$,

where $Asgn_X(A, f, x)$ is the set of all assignments f' that agree with f except possibly on the variable x from X.

Then a model A satisfies a sentence P with variables from X, that is, $A \vDash P$, iff $Asgn_X(A, P) = Asgn_X(A)$.

Finally, the verification of the Satisfaction Condition was proven using charters and parchments [15][16], but it is too complicated to be presented here. $\square$

3 Towards an Institutional Framework for Semantic Networks

Symbolic logic and semantic networks constitute - in essence - different ways of representing information. A logical system represents information using a linear notation, while a semantic network does the same using a graphic notation. In order to realize this, it suffices to consider Peirce's relational graphs, which belong to the type of *assertional networks*[2]. Charles

[2] *Assertional networks* are designed to assert propositions. Unlike *definitional networks*, the information in an assertional network is assumed to be contingently true, unless it is explicitly marked with a modal operator. Some assertional networks have been proposed as models of the conceptual structures underlying natural language semantics [1].

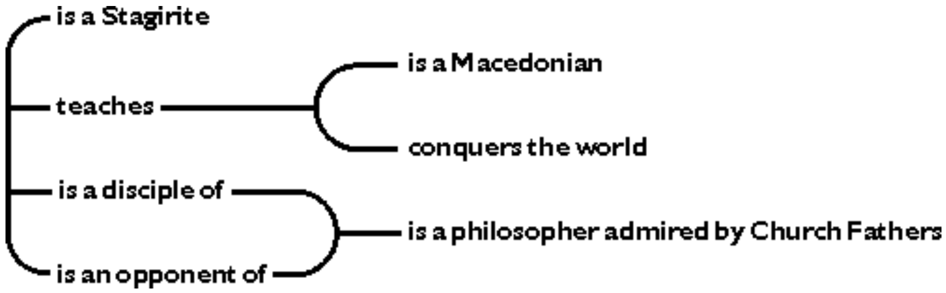


Fig 1: One of Peirce's relational graphs, taken from [1].

Sanders Peirce [12][13] developed the algebraic notation which, with a change of symbols by Peano [14], has become the modern notation of predicate calculus. Nevertheless, even after he had done so, Peirce kept on looking for a graphic notation that would more clearly show "the atoms and molecules of logic". To this end he devised his relational graphs, an example of which we see in figure 1. This graph contains three branching lines of identity, each of which corresponds to an existential quantifier variable in the algebraic notation.The words, or phrases, attached to these lines correspond to the relations or predicates in the algebraic notation. Thus figure 1 corresponds to the following formula in predicate calculus:

$$(\exists x)\,(\exists y)\,(\exists z)\,(isStagirite\,(x) \wedge teaches\,(x,y) \wedge isMacedonian\,(y) \wedge \\ conquersTheWorld\,(y) \wedge isDiscipleOf\,(y,z) \wedge isOpponentOf\,(y,z) \wedge \\ isAdmiredByChurchFathers\,(z)).$$

But although every semantic network can be translated into symbolic logic, there is no commonly accepted formalization for doing so. To the contrary, there are many different individual formalisms, and the transition between them is not a straight-forward task. The variety of symbolisms and expressions used as mathematical formalisms for semantic networks are very useful, but we claim that the institutional machinery - using tools from abstract model theory - can provide a general logical framework for their representation. In particular, Horn-clause logic and first-order logic institutions pave the way for such a framework.

It does not come as a surprise that the vague notion of a semantic network can be formalized - in the context of the theory oftion institutions - in a way very similar to that of first-order logic [11]. Using the first-order logic institution as an "umbrella", we can handle the formal representation of semantic networks via institutions embedding. More specifically, the institution of semantic networks can be identified with the institution of Horn-clause logic with negation, which is embedded into the first-order logic institution. What follows is a brief sketch of the relevant proof.

Theorem 2. *Semantic networks form an institution.*

Proof. (Sketch) In order to show that semantic networks form an institution, it suffices that we follow the relevant proof for many-sorted first-order logic step by step, and adjust it accordingly to accommodate the notion of a semantic network. To begin with, we must define the category **SemSig** which has as objects semantic signatures and as morphisms semantic morphisms.

A signature $\Omega \in \mathbf{SemSig}$ consists of a set S (of sorts) and an S^*-indexed family of sets Π (of predicate or relation symbols). Sorts correspond to **concept types**, and predicate symbols to relations between them.

A semantic morphism $\phi : \Omega \to \Omega'$ is a tuple $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle$ where $\phi_1 : S \to S'$ is a function and $\phi_2 : \Pi \to \Pi'$ is a family of functions $(\phi_2)_u : \Pi_u \to \Pi'_{\phi_1^*(u)}$.

At this point it becomes obvious that the only difference with first-order logic is that in the case of semantic networks we have no operator or function symbols. By leaving out function symbols, we go on to define first the functor $\mathbf{SemMod} : \mathbf{SemSig} \to \mathbf{Cat^{op}}$, and then the functor

$$\mathbf{SemSigSen} : \mathbf{SemSig} \to \mathbf{Set}.$$

The former gives for each signature Ω the category of $\Omega - models$, and the later the set of all sentences that can be defined on it. Finally, we define the satisfaction relation just as in the case of first-order logic, and get the verification of the Satisfaction Condition as a straightforward consequence of its first-order logic counterpart. $\square$

The institution of semantic networks - which can be identified with the institution of Horn-clause logic with negation - allows us to study their general properties without taking into account their syntactic and semantic differences, just as we can do for first-order languages through the institution of first-order logic. The full significance of such a study is yet to be assessed, since it is yet to be conducted, but given the current extensive use of different semantic networks in projects like the semantic web and in artificial intelligence, the study of their general structure is more relevant than ever.

References

[1] J. Sowa. *Semantic Networks*, Encyclopedia of Artificial Intelligence (Ed. S.C. Shapiro). Wiley and Sons: 1987.

[2] R. Hartley, and J. Barnden. *Semantic Networks: Visualizations of Knowledge,* Trends in Cognitive Sciences 1(5) pp.169–175: 1997.

[3] J.A. Goguen, and R.Burstall. *Institutions:Abstracy Model Theory for Specification and Programming,* LFCS Report Series. University of Edinburg: 1990.

[4] A. Tarski. *The Semantic Definition of Truth and the Foundations of Semantics,* Philosophy and Phenomenological Research 4(3), pp.341-376: 1944.

[5] C. Rieger. *An organization of knowledge for problem solving and language comprehension*, Artificial Intelligence 7(2), pp.89-127: 1976.

[6] J. Pearl. *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems:Networks of Plausible Inference,* Morgan Kaufmann: 1988.

[7] J. Pearl, and S. Russel. *Bayesian networks*, Handbook of Brain Theory and Neural Networks (Ed. M.A. Arbib), pp.157–160, MIT Press: 2003.

[8] M. Masterman. *Semantic message detection for machine translation, using an interlingua*, NPL, pp. 438-475: 1961.

[9] J. Doyle. *A truth maintenance system*, Artificial Intelligence 12, pp.231-272: 1979.

[10] G. Gentzen. (1935) *Investigations into logical deduction*, The Collected Papers of Gerhard Gentzen (Ed. and Trs. M. E. Szabo), pp. 68-131. North-Holland Publishing Co.: 1969.

[11] M. Dimarogkona, *Semantic Networks and the Theory of Institutions.* Bachelor thesis (supervisor: Petros Stefaneas). National Technical University of Athens: 2011.

[12] C. S. Peirce. *On the algebra of logic*, American Journal of Mathematics 3, pp.15-57: 1880.

[13] C. S. Peirce. *On the algebra of logic*, American Journal of Mathematics 7, pp.180-202: 1885.

[14] G. Peano. *Principles of mathematics presented by a new method*, van Heijenoort pp.83-97: 1967.

[15] J.A. Goguen, and R. Burstall. *A study in the foundations of programming methodology: Specifications, institutions, charters and parchments,* Lecture Notes in Computer Science Volume 240, pp. 313-333: 1986.

[16] I. Ouranos, *P. Stefaneas and K. Ogata, Formal Analysis of TESLA protocol in the Timed OTS/CafeOBJ method'*, ISOLA 2012 (accepted).

[17] L.K. Schubert. *Extending the expressive power of semantic networks.Proc.* Fourth Int. Joint Conf. Artif. Intel.,Tiblisi, Georgia, pp.512-523: 1971.

О ВЛОЖЕНИИ ГРУПП БАУМСЛАГА–СОЛИТЕРА В ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ БАУМСЛАГА–СОЛИТЕРА

Ф.А. Дудкин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. ак. Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: DudkinF@ngs.ru

Группа называется *хопфовой*, если всякий её гомоморфизм на себя имеет тривиальное ядро, т.е. является автоморфизмом. Далее будем считать, что p и q взаимно простые целые числа, не равные 0, 1, -1. Баумслаг и Солитер [1] впервые предложили серию примеров нехопфовых групп с двумя порождающими элементами и одним соотношением, они теперь обозначаются

$$BS(p,q) = \langle a, t \| t^{-1}a^p t = a^q \rangle.$$

Эти группы оказались интересными и с других позиций: геометрических свойств, функций роста, функции Дэна и т.д. (см. [2])

Будем называть конечно порожденную группу G *обобщенной группой Баумслага–Солитера (GBS группой)* если группа G может действовать на дереве так, что стабилизаторы вершин и ребер – бесконечные циклические группы. По теореме Басса-Серра группа G представима в виде $\pi_1(\mathbb{A})$ – фундаментальной группы некоторого графа групп $\mathbb{A}$ (см., например, [3] или [4]), вершинные и реберные группы которого бесконечные циклические группы.

Всякой GBS группе G можно сопоставить граф с метками (Γ, λ), где Γ – конечный граф, а $\lambda\colon E(\Gamma) \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ метки на ребрах Γ. Метка $\lambda(e)$, написанная на ребре e с началом в вершине v, определяет вложение $\alpha_e\colon e \to v^{\lambda(e)}$ циклической реберной группы $\langle e \rangle$ в циклическую вершинную группу $\langle v \rangle$ (подробнее о графах с метками и их свойствах смотри §1).

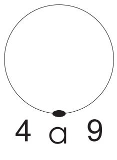
Отметим, что GBS группы довольно активно исследовались в последнее время [5], [6], [7]. В частности, активно обсуждалась проблема изоморфизма GBS групп: определить алгоритмически когда два данных графа с метками задают изоморфные GBS группы. Несмотря на то, что в некоторых частных случаях проблема изоморфизма была решена [8], [9], [10], в общем случае существование алгоритма не установлено.

Пусть T – дерево на котором GBS группа G действует как описано выше. Элемент $g \in G$ называется *эллиптическим* если он фиксирует некоторую вершину. Если g не эллиптический, то он *гиперболический*: существует g-инвариантная ось на которой g действует сдвигами на положительное целое $l(g)$. Определение эллиптичности элемента корректно, не зависит от конкретного действия и дерева, и определяется теоретико-групповыми свойствами группы G [11].

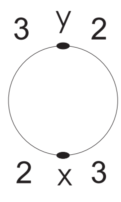
Определим модулярный гомоморфизм $\Delta\colon G \to \mathbb{Q}^*$. Для данного $g \in G$ выберем произвольный нетривиальный эллиптический элемент $a \in G$, тогда для некоторых целых m и n, не равных 0, выполняется равенство $g^{-1}a^m g = a^n$. В этом случае полагаем $\Delta(g) = \frac{m}{n}$. Несложно доказать, что такое определение корректно. Модулярный гомоморфизм играет важную роль в исследовании GBS групп.

Пусть p и q – взаимно простые целые числа, не равные 0, 1 и -1. Понятно, что если $BS(p,q) \subseteq G$, то $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$. Обратно, если $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$, то в группе G разрешимо уравнение $x^{-1}y^p x = y^q$, однако, неясно, верно ли, что в этом случае группа $BS(p,q)$ является подгруппой группы G. В 2007 году Г. Левитт [10] среди прочих замечаний пишет, что скорее всего не верно то, что группа G содержит $BS(p,q)$ если $\frac{p}{q} \neq \pm 1$ принадлежит $\Delta(G)$. Такие сомнения весьма естественны, чтобы это увидеть рассмотрим следующий

Пример. Пусть G – GBS группа заданная графом с метками $\mathbf{\Gamma}$, см. рисунок. Тогда $G \cong \langle x, y, s | x^2 = y^3, s^{-1}y^2 s = x^3 \rangle$.



Граф с метками группы BS(4,9)



Граф с метками **Г**

Существует естественный гомоморфизм из $BS(4,9) \cong \langle a, t | t^{-1}a^4 t = a^9 \rangle$ в группу G заданный на порождающих так:

$$\varphi\colon \begin{cases} a \to x, \\ t \to s. \end{cases}$$

Однако, этот гомоморфизм не является вложением. Действительно, по лемме Бриттона (см. §1) коммутатор $[a^2, ta^3t^{-1}] \neq 1$ в группе Баумслага-Солитера, но его образ в группе G равен $[x^2, sx^3s^{-1}] = [y^3, y^2] = 1$.

Тем не менее вложение удается найти.

Теорема. *Пусть G – GBS группа и p и q – взаимно простые целые числа, не равные 0, 1 и -1. Группа Баумслага–Солитера $BS(p, q)$ вкладывается в группу G тогда и только тогда, когда $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$.*

Наряду с проблемой изомофизма GBS групп, видимо, стоит исследовать *проблему вложения* GBS групп: определить алгоритмически когда два данных графа с метками $\mathbb{A}_1 = (\Gamma_1, \lambda_1)$ и $\mathbb{A}_2 = (\Gamma_2, \lambda_2)$ задают такие GBS группы, что группа $\pi_1(\mathbb{A}_1)$ вкладывается в группу $\pi_1(\mathbb{A}_2)$.

Гипотеза. Проблема вложения GBS групп разрешима.

В пользу этой гипотезы можно привести результаты работы Х. Басса [12]. В этой работе разработана теория накрытий графов групп и для двух графов групп $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ приведены необходимые и достаточные условия вложения $\pi_1(\mathbb{A}_1)$ в $\pi_1(\mathbb{A}_2)$. С другой стороны, эти условия сформулированы так, что требуется немало усилий, чтобы реализовать их в конкретных случаях. В 2009 году [13] автор успешно использовал терему Х. Басса для описания всех подгрупп группы $BS(p, q)$ в терминах графов с метками при простых различных p и q, а в 2010 году [14] описал подгруппы конечного индекса группы $BS(p, q)$ и соответствующие им графы с метками при взаимно простых p и q.

Список литературы

[1] G. Baumslag, D. Solitar, Some two-generator one-relator non-hopfian groups, Bull. AMS, 68, N 3(1962), 199-201.

[2] Ф. А. Дудкин, Группы Баумслага-Солитера и их подгруппы, Итоги науки. Юг России, Математический форум, Т. 6, Группы и графы. - Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012, 21-28.

[3] Serre J.-P. Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1980.

[4] В. А. Чуркин, К теории групп действующих на деревьях, Алгебра и логика, 22, №2 (1983), с.218-225.

[5] M. Clay, M. Forester, Whitehead moves for G-trees, Bull. London Math. Soc., 41, N 2(2009), 205-212.

[6] M. Forester, On uniquenes of JSJ decomposition of finitely generated groups, Comm. Math. Helv., 78, 2003, 740-751.

[7] M. Clay, Deformation spaces of G–trees and automorphisms of Baumslag–Solitar groups, Groups Geom. Dyn., 3, 2009, 39-69.

[8] M. Forester, Splittings of generalized Baumslag-Solitar groups, Geometriae Dedicata, 121, N 1(2006), 43-59.

[9] M. Clay, M. Forester, On the isomorphism problem for generalized Baumslag–Solitar groups, Algebraic & Geometric Topology, 8(2008), 2289–2322.

[10] G. Levitt, On the automorphism group of generalized Baumslag-Solitar groups, Geometry & Topology, 11(2007) 473–515.

[11] M. Forester, Deformation and regidity of simplicial group actions on trees, Geomety & Topology, 6 (2002), 219-267.

[12] H. Bass, Covering theory for graphs of groups, Journal of Pure and Applied Algebra, 89, N 1(1993), 3-47.

[13] Ф. А. Дудкин, Подгруппы групп Баумслага–Солитера, Алгебра и Логика, 48, 1 (2009), 3-30. (F. A. Dudkin, Subgroups of Baumslag-Solitar groups, Algebra and Logic, Vol. 48, No. 1, 2009, 1-19.)

[14] Ф.А. Дудкин, Подгруппы конечного индекса в группах Баумслага-Солитера, Алгебра и логика, 49 (2010), №3, с. 331-345. (F. A. Dudkin, Subgroups of finite index in Baumslag-Solitar groups , Algebra and Logic, Vol. 49, No. 3, 2010, 221-232.)

ВНЕШНИЕ МОДАЛЬНОСТИ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

С.И.Мардаев

Институт математики СО РАН,
пр. акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: mardaev@math.nsc.ru

В статье изучаются неподвижные точки модальных формул и свойства определяющих формул для этих точек.

Ранее автором было доказано, что для формул с внешними модальностями "возможно"(это означает, что любое вхождение модальности "необходимо"находится под действием некоторой модальности "возможно") и позитивным вхождением выделенной переменной их наименьшие неподвижные точки также определимы с помощью формул с внешними модальностями "возможно"на транзитивных моделях. Более того, для таких формул их наименьшие неподвижные точки определимы с помощью итерации. То есть свойства этих формул аналогичны свойствам формул, в которых встречается только модальность "возможно". Это означает, что в модальных логиках для определимости наименьших неподвижных точек внешние модальнсти играют решающую роль. Это замечание приводит к исследованию формул с внешними модальностями "необходимо". Доказано, что для формул с внешними модальностями "необходимо"и позитивным вхождением выделенной переменной их наименьшие неподвижные точки также определимы с сохранением позитивности параметров с помощью формул с внешними модальностями "необходимо"в рефлексивнх и иррефлексивных моделях со слабым условием конфинальности возрастающих цепей, что подтверждает важность внешних модальностей. Таким образом, можно сказать, что внешние модальности сохраняются при переходе к определяющим формулам. Это ставит задачу исследования свойств формул, сохраняющихся при переходе к определяющим формулам.

Модальные пропозициональные формулы составляются из пропозициональной константы $\bot$ (ложь) и пропозициональных переменных $p, q, r, \ldots$ с помощью бинарных связок $\wedge$, $\vee$ и унарных связок $\neg$, $\Box$ и $\Diamond$.

Шкала Крипке $\langle W, R \rangle$ состоит из непустого множества W и бинарного отношения R на W. *Модель Крипке* $\langle W, R, v \rangle$ состоит из шкалы

Крипке $\langle W, R \rangle$ и означивания v. *Означивание* v — это функция, которая каждой переменной q ставит в соответствие подмножество $v(q)$ множества W. Значение переменной q_i будем обозначать соответствующей прописной буквой Q_i. Функция v естественным образом продолжается на формулы: константе $\perp$ всегда соответствует пустое множество, связкам $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$ соответствуют дополнение, пересечение, объединение и следующие операции на множествах:

$$\Box A = \{x \mid \forall y(xRy \Rightarrow y \in A)\}, \ \Diamond A = \{x \mid \exists y(xRy \wedge y \in A)\}.$$

Пусть дана формула $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ от переменных $p, q_1, \ldots, q_n$ и модель Крипке $\langle W, R, v \rangle$, в которой заданы значения $Q_1, \ldots, Q_n$ переменных $q_1, \ldots, q_n$, а значение переменной p не задано. Формула φ определяет на модели $\langle W, R, v \rangle$ оператор $F_\varphi(P) = \varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$. Множество P называется неподвижной точкой оператора F, если выполняется $P = F(P)$. Если неподвижная точка P совпадает со значением некоторой формулы $\omega(q_1, \ldots, q_n)$, то формула ω *определяет* неподвижную точку P.

Переменная входит в формулу только позитивно, если все ее вхождения находятся под действием четного числа отрицаний.

Формула ω сохраняет позитивность параметров, если для каждого q_i верно, что если q_i входит в φ только позитивно, то и в ω переменная q_i входит только позитивно.

Шкала Крипке $< W, R >$ называется шкалой с условием конфинальности бесконечно возрастающих цепей, если для любой бесконечно возрастающей цепи $x_1 R x_2 R \ldots$ (x_i не равно x_j) существует x_i такой, что для любого $x_i R y$ существует x_j такой, что $y R x_j$.

Теорема 1. *Для любой формулы $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$, позитивной по p, с внешними модальностями $\Box$, существует формула $\omega(q_1, \ldots, q_n)$, сохраняющая позитивность параметров, с внешними модальностями $\Box$ и определяющая наименьшую неподвижную точку оператора F_φ в любой частично упорядоченной модели со слабым условием конфинальности возрастающих цепей.*

Аналогичная теорема верна и для строго частично упорядоченных моделей со слабым условием конфинальности возрастающих цепей.

Конструкция чересчур громоздка, сложна и требует много дополнительных определений, чтобы приводить ее здесь. В полном виде ее можно найти в диссертации [1]. Для доказательства достаточно тщательно проследить за нижней частью конструкции, отвечающей за внешние модальности. Это достаточно техническая задача.

В связи с этим результатом возникает общая проблема исследования свойств исходной формулы φ, которые можно перенести на определяющую формулу ω.

Литература

[1] Неподвижные точки модальных операторов, диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н., Новосибирск, 2001, 237 с.

СВОЙСТВА ЖЕСТКОСТИ, ПСЕВДОПРОСТОТЫ И ТРАНЗИТИВНОСТИ АЛГЕБР, ВЫРАЗИМЫЕ В ЯЗЫКЕ $L_{\omega_1\omega}$

А.Г. Пинус

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К.Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: algebra@nstu.ru

Как хорошо известно круг алгебраических свойств алгебраических систем и отношений между последними выразимых в рамках языка исчисления предикатов первого порядка достаточно ограничен. В то же время, практически все эти свойства и отношения могут быть выражены в рамках языка второго порядка. Однако эта мощь языка второго порядка, с другой стороны, приводит к тому, что фактически невозможна общая содержательная теория моделей этого языка. В этом плане промежуточное положение между языками первого и второго порядка занимают бесконечные языки вида $L_{\omega_\alpha\omega}$ построенные как некоторое подобие (обобщение) языка первого порядка и, в то же время, значительно более выразительные, чем язык первого порядка.

При этом целый ряд свойств алгебраических систем выразимых изначально, в силу их исходного определения, в языке второго порядка оказываются выразимыми формулами бесконечных языков. В качестве примера подобной ситуации укажем на работы автора [1], [2] в которых, в частности, устанавливается возможность подобной выразимости в бесконечных языках для отношений геометрической эквивалентности универсальных алгебр, синтаксической неявной эквивалентности алгебр, определимости классических Галуа-замыканий подалгебр универсальных алгебр и т.д.

Подобным вопросам, связанным с понятием жесткости алгебраических систем (отсутствия нетривиальных автоморфизмов, эндоморфизмов «на») и их транзитивности, а также некоторым свойствам связанным с конгруэнциями алгебр и посвящена эта работа.

Напомним (см., к примеру, [3], [4]), что алгебраическая система называется жесткой (эпижесткой, onto-rigid в терминологии [4]), если она не имеет нетривиальных автоморфизмов (нетривиальных эндоморфизмов на себя). Очевидным образом это свойство, в случае конечности сигнатуры, записывается на языке исчисления предикатов второго порядка. В то же время оно не может быть записано на языке логики первого порядка (к примеру, существуют безатомные, а, значит, элементарно эквивалентные булевы алгебры как жесткие (см. [5]), так и не являющиеся таковыми). Более того, существуют даже счетные элементарно эквивалентные системы конечной сигнатуры одна из которых жесткая, другая – нет: пусть $\mathfrak{A} = \omega$ является первым бесконечным ординалом, а $\mathfrak{B}$ — любое элементарно эквивалентное $\mathfrak{A}$ счетное отличное от $\mathfrak{A}$ линейно упорядоченное множество, тогда, очевидным образом, $\mathfrak{A}$ — жесткая система, а $\mathfrak{B}$ — нет. Покажем, что такое невозможно для счетных алгебраических систем эквивалентных в языке $L_{\omega_1\omega}$. По поводу определения языка $L_{\omega_1\omega}$ см., к примеру, [6].

Для любого натурального n алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ называется (см., к примеру, [3]) n-транзитивной, если для любых $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ таких, что $a_i = a_j$ тогда и только тогда, когда $b_i = b_j$ существует $\varphi \in \mathrm{A}ut\mathfrak{A}$ такой, что $\varphi(a_i) = b_i$ для $i \leqslant n$. Без труда, на примере плотных линейных порядков замечается, что свойство, к примеру, 1-транзитивности не может быть записано на языке первого порядка, в то время как определение n-транзитивности формулируется в языке второго порядка. Покажем, что для счетных алгебраических систем свойства n-транзитивности, как и свойства жесткости, выразимы в языке $L_{\omega_1\omega}$.

Хорошо известно (см., к примеру, [6]) следующее утверждение.

Теорема Скотта ([7]) *Для любой не более чем счетной алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ не более чем счетной сигнатуры существует предложение $\Phi_{\mathfrak{A}}$ в языке $L_{\omega_1\omega}$ такое, что для всех не более чем счетных систем $\mathfrak{B}$ условия*

1. $\mathfrak{B} \models \Phi_{\mathfrak{A}}$;

2. $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

равносильны.

Покажем, что теорема Скотта влечет выразимость свойства жесткости для не более чем счетных алгебраических систем не более чем счетной сигнатуры в языке $L_{\omega_1\omega}$. А именно имеет место

Утверждение 1. *Жесткие счетные алгебры выделяются среди счетных алгебр фиксированной сигнатуры совокупностью $L_{\omega_1\omega}$-формул этой сигнатуры.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ жесткая не более чем счетная алгебра не более чем счетной сигнатуры σ. Через σ' обозначим обогащение сигнатурыσ добавлением новой константы c. Пусть $d \in A$. Через $\mathfrak{A}_d$ обозначим обогащение алгебры $\mathfrak{A}$ до сигнатуры σ' путем интерпретации константы c элементом d. Через $\Phi_{\mathfrak{A}_d}$ обозначим соответствующее $L_{\omega_1\omega}$-предложение из формулировки теоремы Скотта, а через $\Phi_{\mathfrak{A}_d}(x)$ $L_{\omega_1\omega}$-формулу получающуюся из $\Phi_{\mathfrak{A}_d}$ заменой константы c на переменную x. Тогда для любых элементов $d_1, d_2 \in A$ истинность формулы $\Phi_{\mathfrak{A}_{d_1}}(x)$ на элементе d_2 в алгебре $\mathfrak{A}$ означает существование автоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ переводящего элемент d_1 в элемент d_2. Тем самым, для любой не более чем счетной алгебры $\mathfrak{B}$ сигнатуры σ, на $\mathfrak{B}$ истинна совокупность $L_{\omega_1\omega}$-формул

$$\Sigma = \{\Phi_{\mathfrak{A}} \to \&_{d \in A} \forall x, y(\Phi_{\mathfrak{A}_d}(x) \& \Phi_{\mathfrak{A}_d}(y) \to x = y) | \\ \mathfrak{A} \text{ — любая не более чем счетная } \sigma\text{-алгебра}\}$$

тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ жесткая σ-алгебра. Утверждение 1 доказано.

Аналогичная ситуация имеет место и для свойства эпижесткости. Напомним, что - формула называется позитивной, если при ее индуктивном построении не востребованы связки $\neg$ и $\to$.

В работе [8] доказан следующий аналог теоремы Скотта.

Теорема 1 ([8]). *Для любой не более чем счетной системы $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ не более чем счетной сигнатуры существует предложение $\Phi^+_{\mathfrak{A}}$ языка $L_{\omega_1\omega}$ такое, что для любой не более чем счетной системы $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma \rangle$ условия*

1. $\mathfrak{B} \models \Phi^+_{\mathfrak{A}}$,
2. *существует эпиморфизм системы $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$*

равносильны.

Следующее утверждение о выразимости в языке $L_{\omega_1\omega}$ свойства эпижесткости для счетных систем вытекает из теоремы 1 подобно тому, как утверждение 1 вытекает из теоремы Скотта.

Утверждение 2. *Эпижесткие счетные алгебры не более чем счетной сигнатуры выделяются среди счетных алгебр этой сигнатуры совокупностью $L_{\omega_1\omega}$-формул.*

Доказательство этого утверждения дословно повторяет доказательство утверждения 1 при замене формул $\Phi_{\mathfrak{A}_d}$ на формулы $\Phi^+_{\mathfrak{A}_d}$ и ссылок на теорему Скотта ссылками на теорему 1.

Наконец отметим, что ограничение в формулировках утверждений 1, 2 не более чем счетными алгебрами $\mathfrak{A}$ существенно. Действительно, пусть $\mathfrak{A}$ некоторая несчетная жесткая (эпижесткая) безатомная булева алгебра (о существование таковых см. [5]). По теореме Левенгейма-Сколема для языка $L_{\omega_1\omega}$ существует счетная булева алгебра $\mathfrak{B}$ эквивалентная алгебре $\mathfrak{A}$ в языке $L_{\omega_1\omega}$, а, значит, $\mathfrak{B}$ счетная безатомная булева алгебра, которая, как хорошо известно, не является ни эпижесткой, ни жесткой.

Очевидным образом с помощью формул $\Phi_{\mathfrak{A}_d}$ доказывается и следующее утверждение.

Утверждение 3. *Для любого натурального n, если $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$ n-транзитивная не более чем счетная алгебраическая система не более чем счетной сигнатуры и $\mathfrak{B}$ не более чем счетная система эквивалентная системе $\mathfrak{A}$ в языке $L_{\omega_1\omega}$, то и $\mathfrak{B}$ является n-транзитивной.*

Для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$ и любых $a, b \in A$ через $\Theta^{\mathfrak{A}}_{a,b}$ обозначим главную конгруэнцию алгебры $\mathfrak{A}$ порожденную парой $\langle a, b\rangle$. Классическим является следующее описание главных конгруэнций

Лемма Мальцева ([9]). *Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$ и любых $a, b, c, d \in A$ следующие условия эквивалентны:*

1. $\langle c, d\rangle \in \Theta^{\mathfrak{A}}_{a,b}$,
2. *существуют натуральное n, термы $p_0(\bar{x}_0, y), p_1(\bar{x}_1, y), \dots, p_n(\bar{x}_n, y)$ сигнатуры σ и кортежи элементов $\bar{c}_i$ из A такие, что $c = p_0(\bar{c}_0, y), d = p_n(\bar{c}_n, y)$ и для $0 \leqslant i < n$ $p_i(\bar{c}_i, b) = p_{i+1}(\bar{c}_{i+1}, a)$.*

Тем самым, очевидно, что для любой не более чем счетной сигнатуры σ существует $L_{\omega_1\omega}$-формула $\Phi_{\mathrm{Con}}(x, y, u, v)$ сигнатуры σ такая, что для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$ и любых $a, b, c, d \in A$ $\langle c, d\rangle \in \Theta^{\mathfrak{A}}_{a,b}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models \Phi_{\mathrm{Con}}(c, d, a, b)$.

Напомним (см., к примеру, [3]), что алгебра называется простой (подпрямо неразложимой), если она имеет лишь две конгруэнции $\bigtriangledown$ и $\bigtriangleup$ (если у нее существует наименьшая среди конгруэнций отличных от $\bigtriangleup$). В силу существования формулы $\Phi_{\mathrm{Con}}(x, y, u, v)$ имеет место

Утверждение 4. *Классы простых (подпрямо неразложимых) алгебр фиксированной не более чем счетной сигнатуры аксиоматизируемы с помощью некоторой $L_{\omega_1\omega}$-формулы.*

В работах [10], [11] доказаны следующие утверждения

Теорема 2 ([10]). *Для любого $L_{\omega_1\omega}$-предложения Φ, если Φ имеет ровно k попарно неизоморфных счетных моделей, где $\aleph_1 \leqslant k < 2^{\aleph_0}$, то Φ имеет модель несчетной мощности.*

Теорема 3 ([11], $V = l$). *Для любого $L_{\omega_1\omega}$-предложения Φ, если Φ имеет ровно k попарно неизоморфных моделей мощности $\aleph_1$, где $1 \leqslant k < 2^{\aleph_1}$, то Φ имеет модель мощности $2^{\aleph_1}$.*

Из утверждения 4 и теорем 2, 3 вытекает

Следствие 1. *а) Любое многообразие V универсальных алгебр не более чем счетной сигнатуры, имеющее ровно k попарно неизоморфных счетных простых (подпрямо неразложимых) алгебр, где $\aleph_1 \leqslant k < 2^{\aleph_0}$, имеет простую (подпрямо неразложимую) несчетную алгебру.*

б) ($V = L$) Любое многообразие V универсальных алгебр не более чем счетной сигнатуры, имеющее ровно k попарно неизоморфных простых (подпрямо неразложимых) алгебр мощности $\aleph_1$, где $1 \leqslant k < 2^{\aleph_1}$, имеет простую (подпрямо неразложимую) алгебру мощности $2^{\aleph_1}$.

В работе [12] (в предположении GCH) доказано, что спектры простых алгебр (совокупности бесконечных мощностей простых алгебр) любого многообразия имеют вид либо $\varnothing$, либо $\{\aleph_0\}$, либо $\{\aleph_0, 2^{\aleph_0}\}$, либо $[\aleph_0, \infty)$.

Тем самым, из этого утверждения и утверждения следствия 1 вытекает

Следствие 2 ($V = L$). *Любое многообразие V универсальных алгебр не более чем счетной сигнатуры, имеющее континуальную простую алгебру, но у которого число таковых попарно неизоморфных алгебр меньше чем $2^{2^{\aleph_0}}$ имеет простые алгебры любой бесконечной мощности.*

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется псевдопростой (см., к примеру, [3], [13]), если любая ее неодноэлементная фактор алгебра изоморфна ей самой. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется р-псевдопростой (см. [14]), если ее фактор по любой главной конгруэнции либо одноэлементен, либо изоморфен $\mathfrak{A}$.

Для любой $L_{\omega_1\omega}$-формулы Φ и любой $L_{\omega_1\omega}$-формулы $\Psi(x, y)$ через $\mathrm{Rel}_\Psi\Phi$ обозначим $L_{\omega_1\omega}$-формулу получаемую из Φ заменой равенства $x = y$ на формулу $\Psi(x, y)$. Тогда, если Ψ определяет на $\mathfrak{A}$ конгруэнцию Θ, то следующие условия равносильны: $\mathfrak{A}_{/\Theta} \models \Phi$ и $\mathfrak{A} \models \mathrm{Rel}_\Psi\Phi$.

Имеют место:

Утверждение 5. *Совокупность р-псевдопростых счетных алгебр любой не более чем счетной сигнатуры σ аксиоматизируема в классе всех счетных алгебр этой сигнатуры с помощью некоторой совокупности $L_{\omega_1\omega}$-формул.*

Очевидно, что совокупностью подобных формул является $\{\Phi_{\mathfrak{A}} \to \forall u, v(\exists x, y \neg\Phi_{\mathrm{Con}}(x, y, u, v) \to \mathrm{Rel}_{\Phi_{\mathrm{Con}}(x,y,u,v)}\Phi_{\mathfrak{A}} | \mathfrak{A}$ —произвольная σ-алгебра $\}$.

Напомним при этом, что $\Phi_{\mathfrak{A}}$ — формула Скотта для алгебры $\mathfrak{A}$.

Утверждение 6. *Совокупность псевдопростых счетных алгебр любой не более чем счетной сигнатуры σ аксиоматизируема в классе всех* *счетных алгебр этой сигнатуры с помощью некоторой совокупности $L_{\omega_1\omega}$-формул.*

Подобной совокупностью является $\{\Phi^+_{\mathfrak{A}} \& \exists x, y(x \neq y \rightarrow \Phi_{\mathfrak{A}}) | \mathfrak{A}$ — произвольная σ-алгебра $\}$.

Список литературы

[1] А.Г.Пинус. Неявно эквивалентные универсальные алгебры.- Сибирский матем. журнал.- т.53. - №5.- 2012.- с.1077-1090.

[2] А.Г.Пинус. О классическом Галуа-замыкании для универсальных алгебр.- в печати.

[3] А.Г.Пинус. Производные структуры универсальных алгебр.- Из-во НГТУ, Новосибирск, 2007.

[4] E.K. van Douwen, J. Donald Monk, M.Rubin. Some questions about Boolean algebras.- Alg. univ. – v.11.- №2.-1980.- p.220-243.

[5] R.Bonnet. Very strongly rigid Boolean algebras, continuum discrete set condition, countable antichain condition.- Alg. univ.- v.11.- №3.- 1980.- p.341-364.

[6] Х. Дж. Кейслер. Основы теории моделей.- в «Справочная книга по математической логике», т.1.- Из-во «Наука».- М.- 1982.- с.55-108.

[7] D. Scott. Logic with denumerable long formulas and finite strings of quantifiers.- in «The Theory of Models».- North-Holland Publ. Comp.- Amsterdam.- 1965.- p.329-341.

[8] А.Г.Пинус. Определимые функции универсальных алгебр и определимая эквивалентность алгебр.- Алгебра и логика.- в печати.

[9] А.И.Мальцев. К общей теории алгебраических систем.- Мат. сб. (нов серия).- т.35(77).- 1954.- с.3-20.

[10] V.Harnik, M.Malitz. A tree argument in infinitary model theory.- Proc. Amer. Math. Soc.-v.67.- №2.- 1977.- p.309-314.

[11] S.Shelach. Categoricity in $\aleph_1$ of sentences of $L_{\omega_1\omega}$.- Israel J. of Math.- v.20.- №2.-1975.- p.127-148.

[12] R.McKenzie, S.Shelach. The cardinals of simple models for universal theories.- Proc of the Tarski Symposium amer. Math. soc., Providence, Rhode Island.- 1974.- p.53-75.

[13] D.Monk. On pseudo-simple universal algebras.- Proc. Amer. Math. Soc.- v.13.- №13.- 1962.- p.534-546.

[14] А.Г.Пинус, А.Ю. Денисов. О p-псевдопросых алгебрах.- Алгебра и логикаю- т.31.- №6.- 1992. с.637-654.

ОБОБЩЕННАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ В КЛАССИЧЕСКОЙ И АЛЬТЕРНАТИВНОЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Л.Н. Победин

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: Pobedinle@mail.ru

1 Введение

Под классической бесконечностью мы подразумеваем стройную теорию бесконечных множеств, разработанную в ZF. Альтернативная бесконечность была последовательно разработана в альтернативной теории множеств (AST) чешским математиком П. Вопенка. Его труд, первоначально изданный на словацком языке был переведен на русский язык и издан в издательстве Института математики СО РАН (Новосибирск) в 2004 г. под названием "Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность" и представляет собой монографию [1] в 611 страниц. Наличие альтернативы всегда полезно в научных исследованиях, однако прямые сопоставления ZF и AST оказываются весьма затруднительными. Причиной этого является то, что в этих теориях за основу взяты достаточно разные объекты. Тем не менее, обе эти теории претендуют на определенную полноту (ZF несомненно), а потому их сравнительный анализ является актуальным. Для проведения такого анализа у нас возникла следующая идея: взять подходящую математическую конструкцию в ZF и поместить ее в AST. Тогда наглядно были бы видны достоинства и недостатки одной и другой теории множеств. В данной работе на роль такой конструкции предлагается так называемая обобщенная вычислимость.

2 Обобщенная вычислимость в ZF

Под обобщенной вычислимостью понимается вычислимость на машинах Тьюринга с оракулом. Такая вычислимость на сегодняшний день не является слишком экзотичной для тех математиков, которые знакомы с этим понятием, но автор этой статьи, желая быть понятным более широкому кругу математиков, считает своим долгом пояснить, откуда берется термин “оракул”.

Что такое машина Тьюринга пояснять излишне. Следующий этап в развитии понятия вычислимости — относительная вычислимость. Пусть машина m вычисляет некоторую функцию относительного множества A: $\{m\}^A(t)$. Тогда к обычной машине Тьюринга добавляется спрашивающая команда: $X \in A$? Если A — рекурсивное множество, то получив на свой вопрос ответ $\{0, 1\}$ (да или нет), машина работает дальше по своей программе. Можно заменить множество A характеристической функцией $F(x)$. И тогда мы приходим к понятию машины Тьюринга с оракулом.

Формально машина с оракулом есть пара $m[F]$, где m — вычислимая программа (запись на некотором формальном языке, т.е. конструктивный объект), а $F(x)$ — произвольная числовая функция (теоретико-множественный объект, оракул). Обычно фиксируется некоторая взаимно-однозначная гёделевская нумерация всевозможных машин и не дифференцируются машина и ее номер.

Тот объект, который дает машине ответ на ее вопрос, следуя Тьюрингу, называют оракулом, потому что он дает правильный ответ, обходясь без какого-либо явного способа нахождения этого ответа.

Первоначально в теории алгоритмов рассматривались вычисления со всюду определенными оракулами. Теория вычислений с такими оракулами мало чем отличается от обычной теории алгоритмов. Но когда $F(x)$ — частичная функция, то машина m может не получить ответа на свой вопрос от оракула. Самое естественное соглашение — это считать, что в этом случае процесс вычисления прерывается безрезультатно. Таким образом, при работе машины m с частичным оракулом $F(x)$ возможны три случая:

(1) машина m на все свои вопросы получает от оракула F ответы и останавливается с выдачей результата;

(2) машина m на все свои вопросы получает от оракула F ответы и работает бесконечно;

(3) машина m на некоторый вопрос не получает ответ от оракула F и застревает.

Для частичного оракула $F(x)$ особый интерес имеет следующая семантика вопросов, которая задает машина m оракулу: “остановится ли машина m с номером x, работая с оракулом F?”. Как хорошо известно, вопрос об остановке машины Тьюринга явился первой рекурсивно неразрешимой проблемой. Для частичного оракула $F(x)$ появляется возможность сформулировать проблему остановки следующим образом:

$$g_F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x[F] \text{ останавливается;} \\ 1, \text{ если } x[F] \text{ работает бесконечно;} \\ \text{не определено, если } x[F] \text{ застревает.} \end{cases}$$

Такая вариация проблемы остановки тесно связана с джамп-операцией, и для неё оказывается справедливым следующий

Основной результат. *Существуют частичные оракулы F, для которых функция $G_F(x)$ F-вычислима.*

Такие оракулы называются *нормальными*, в частности, таким оракулом является гиперарифметический оракул.

Естественно, возникает вопрос о каких-либо приложениях такой теории абстрактно вычислимых функций. Оказывается, что с помощью обобщенной вычислимости можно определить рекурсивность функционалов высших типов, например, вида $\varphi(\alpha(x))$. Мы не можем непосредственно на ленту машины Тьюринга записать функцию $\alpha(x)$, но мы можем записать номер машины (натуральное число), которая вычисляет функцию $\alpha(x)$ с оракулом F (Клини, [2]).

Дальнейшие исследования показали, что для того, чтобы клиниевская вычислимость функционалов высших типов обладала замкнутыми свойствами F-перечислимых множеств, аналогичными стандартной теории алгоритмов, необходимо, чтобы оракул F обладал достаточно сильным свойством. Для него должен быть справедлив некий квазиалгоритмический аналог аксиомы выбора, т.е. чтобы для него с оракулом F можно было бы из любого непустого F-перечислимого множества выделить один элемент. Функция, выделяющая этот элемент, называется *селекторной функцией*, а оракул, обладающий селекторной функцией, называется *регулярным*.

Итак, отметим следующие три свойства, необходимые для построения любой содержательной теории F-вычислимых функций:

(i) оракул F наделен трансфинитной структурой;

(ii) оракул F нормален;

(iii) оракул F регулярен.

Естественно возникает вопрос о существовании такой концепции обобщенной вычислимости, при которой оракул был бы всегда регулярен (как в случае гиперарифметического оракула). Такая концепция была разработана в [3]. В ней вычислимость на машине Тьюринга рассматривается не с одноместным, а с двуместным оракулом $H((x, y)$.

При работе машины Тьюринга с двуместным оракулом $H(x, y)$ машина x может получить один отказ на свой вопрос оракула H, и тем не менее, продолжить свою работу дальше по своей программе. Ограничимся случаем только одного отказа. В случае получения повторного отказа машина застревает. В свою очередь оракул H в некоторых случаях может дать отказ машине на ее вопрос, несмотря на то, что у него имеется правильный ответ. Тогда оракул оказывается функцией уже не одной, а двух переменных $H(x, y)$, и будет реагировать не только на задаваемый машиной вопрос, но и на самою спрашивающую машину x. Таким образом, оракул $H(x, y)$ — это числовая функция, принимающая значения $0, 1, 2$ (2 есть код отказа на вопрос). Оказывается, что такой двуместный оракул всегда (по построению) обладает H-вычислимой селекторной функцией, т.е. справедлива теорема:

Теорема 1. *Оракул $H_G(x, y)$ регулярен, где $G(\alpha)$ — функционал типа* 2.

Заканчивая рассмотрение обобщенной вычислимости в ZF, отметим, что более естественно рассматривать вычисления на машинах Тьюринга с двуместным оракулом $H(x, y)$ (в виду регулярности оракула $H(x, y)$ по построению).

3 Обобщенная вычислимость в альтернативной теории множеств (AST)

В этой части необходимо разъяснить некоторые положения альтернативной теории множеств.

На стр. 62 своей монографии [1] П. Вопенка вводит понятие полумножества, а именно. Скажем, что класс X есть *полумножество*, если существует такое множество Y, что $X \subseteq Y$. Тот факт, что объект есть полумножество, записывается $\mathrm{Sm}(x)$. Определение полумножества следовательно можно записать так:

$$\mathrm{Sm}(X) :\Leftrightarrow \mathrm{Cls}(X) \wedge (\exists Y)(\mathrm{Set}(Y) \wedge X \subseteq Y).$$

Полумножество, не являющееся множеством, называется *собственным полумножеством.*

Далее автор замечает, что собственные полумножества существуют, и приводит некоторые примеры собственных полумножеств. Более того, он отмечает, что с примерами собственных полумножеств мы встречаемся на каждом шагу. Один из этих примеров мне хочется привести. Рассмотрим множество книг в какой-либо обширной библиотеке. Тогда класс интересных книг — пример полумножества. Здесь следует отметить, что полумножество — это нечеткий объект. Обращение внимания на существование нечетких объектов является сутью AST.

Разумеется, что математику, работающему в ZF (как и автору этой статьи), факт существования полумножеств не вызывает желания работать с ними. Но оказывается, что с ними работать и не надо. Рекомендуется лишь признать их наличие. Дальнейшая работа привела автора AST к более конструктивному понятию, а именно, — к понятию *горизонта.*

Попытаемся прояснить это понятие.

Альтернативная теория множеств занимается *естественной бесконечностью*, т.е. такой формой бесконечности, которую мы можем обнаружить в результате пусть даже мысленного опыта. Каждый наш взгляд, куда бы он ни был направлен, всегда чем-то ограничен. Либо на его пути оказывается твердая граница, четко его пресекающая, либо он ограничен горизонтом, в направлении к которому утрачивается ясность нашего видения. По-видимому, можно говорить о горизонте нашего познания, ума, мысли. Сам горизонт признается четким явлением, однако то, что находится перед горизонтом, выделяется нечетко. Вернее, по направлению к горизонту мы встречаемся с феноменом нечеткости. Вот на эту нечеткость в AST возлагается та роль, которую играет бесконечность в классической теории множеств.

Как могла бы выглядеть теория обобщенной вычислимости с оракулом в AST? Для этого нам, прежде всего, пришлось бы определить понятие горизонт $\underline{\Gamma}$. Пусть это будет достаточно большое конечное натуральное число S. Тогда примем следующее соглашение. Рассмотрим обобщенную вычислимость с двуместным оракулом $H(x, y)$. Тогда, если машина y останавливается за число тактов своей работы меньшее, чем число S, то оракул H на вопрос машины x дает ответ $H(x, y) = 0$. Если же машина y не останавливается за S тактов своей работы, то будем считать, что в этом случае машина у работает бесконечно, и ответ оракула полагаем $H(x, y) = 1$. По сути дела, мы можем повторить конструкцию построения двуместного оракула $H_G(x, y)$, несколько видоизменяя семантику вопросов и ответов. Разумеется, детальное построение оракула $H(x, y)$ в AST потребует достаточно длинного описания, и это описание желательно было бы предъявить, но поскольку нас интересует сравнительный анализ ZF и AST, это описание не является целью данной статьи. Поэтому пока мы анонсируем следующий результат: в AST существует аналог $H_G(x, y)$ двуместного нормального и регулярного оракула, обладающего трансфинитной структурой.

4 Заключение

Рассмотрев одну математическую конструкцию (обобщенную вычислимость) в ZF и AST, мы приходим к следующим выводам, которые сформулируем в виде тезиса. Начнем с AST.

1. В альтернативной теории множеств понятие конечного является четким понятием, т.е. все то, что ограничено горизонтом, является конечным. Однако любая теория множеств не может обойтись без понятия бесконечного. В AST роль бесконечности берут на себя объекты, лежащие за горизонтом. Это нечеткие объекты.

2. Теория множеств ZF является стройной теорией бесконечных множеств. В этой теории понятие бесконечного получает полную четкость. Однако следует заметить, что понятие конечного в этой теории перестает быть четким. Это требует пояснения. Разумеется, в ZF есть четкое определение конечного множества, но два числа 10^{10} и $10^{10^{10}}$ в этой теории считаются равноконечными. Заметим, что по современным представлениям физики второе число превышает число атомов во Вселенной. Поэтому, когда мы рассматриваем конечное множество в ZF, то не очень понятно, что мы имеем в виду. Понятие конечного в ZF становится нечетким.

Мы закончим нашу статью следующим тезисом, состоящим из двух пунктов.

П.1. Можно работать в теории множеств, в которой понятие бесконечного является четким, тогда в этой теории понятие конечного является нечетким (ярким примером такой теории является ZF).

П.2. Если мы желаем работать в теории множеств, в которой понятие конечного является четким, тогда в этой теории понятие бесконечного становится нечетким (пример AST).

Резюме. Понятие конечного и бесконечного взаимосвязаны. Обращая внимание на одно из них, следует, на наш взгляд, внимательно смотреть, что происходит с симметричным понятием.

Список литературы

[1] *Вопенка П.* Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бес-

конечность, Новосибирск: изд-во Института математики СО РАН, 2004.

[2] *Клини С.К.* Функционалы конечных типов, вычислимые на машинах Тьюринга, “Математическая логика и ее применение”, М., Мир, 1965.

[3] *Победин Л.Н.* Вычислимость с двуместным оракулом, Сиб. мат. ж., 1994, т.35, №5, с.1138-1147.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛИ

Е.Н. Порошенко*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К.Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: auto_stoper@ngs.ru

Пусть X — конечное множество и $G = \langle X, E\rangle$ — неориентированный граф без петель, множеством вершин которого является множество X, а множеством ребер — некоторое симметричное отношение на множестве X, то есть подмножество множества $X \times X$. Таким образом, граф G неориентированный, а значит элементами множества E являются неупорядоченные пары, которые будут обозначаться $\{x, y\}$, где $x, y \in X$.

Частично коммутативной алгеброй Ли над кольцом R с единицей называется R-алгебра $\mathcal{L}_R(X; G)$ с множеством порождающих X и множеством определяющих соотношений

$$[x_i, x_j] = 0, \text{ где } \{x_i, x_j\} \in E.$$

(Здесь и далее $[g, h]$ обозначает лиевское произведение элементов g и h). Граф G называется *определяющим графом* соответствующей алгебры.

Можно также рассматривать частично коммутативные алгебры Ли в том или ином многообразии алгебр. В этом случае частично коммутативная алгебра Ли — это R-алгебра, которая задается посредством того же множества порождающих и определяющих соотношений на них, а также тождеств, задающих данное многообразие. В данной статье будут рассматриваться частично коммутативные алгебры в многообразии метабелевых алгебр Ли.

Частично коммутативные группы являются объектом пристального внимания (см., например, [15, 10, 6, 7, 12, 5, 3, 4, 9]). Несколько работ (например, [5, 3, 9]) посвящено исследованию свойств универсальных теорий частично коммутативных метабелевых групп.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00084).

Частично коммутативные алгебры (как ассоциативные, так и алгебры Ли) изучены значительно меньше, однако и для них тоже получен ряд результатов [13, 8, 11, 1, 2, 14]). В частности, [14] посвящена изучению универсальных теорий частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, определяющие графы которых являются деревьями.

Пусть R — область целостности и пусть $G = \langle X; E\rangle$ — граф с множеством вершин X и множеством ребер E. Через $M(X; G)$ обозначим частично коммутативную метабелеву алгебру Ли с множеством порождающих X и определяющим графом G, то есть R-алгебру Ли $M(X)/I$, где $M(X)$ — свободная метабелева R-алгебра Ли, а I — ее идеал, порожденный множеством соотношений

$$\{[x_i, x_j] = 0 \,|\, x_i, x_j \in X, \text{ такие что } \{x_i, x_j\} \in E\}.$$

Если $\{x, y\} \in E$, то будем писать $x \leftrightarrow y$.

Будем считать, что $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ и операции сложения и вычитания определены естественным (для кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$) образом. Тогда для произвольных $r, s \in \mathbb{Z}_n$ через $|r-s|$ обозначим минимальный (в смысле обычного порядка: $0 < 1 < \dots < n-1$) из элементов $r-s, s-r$.

Через C_n обозначим граф на n вершинах, являющийся циклом. То есть граф с множеством вершинам $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, и множеством ребер $\big\{\{x_i, x_j\} \,|\, |i-j| = 1\big\}$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть R — область целостности, содержащая $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца, $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$, $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{m-1}\}$ — множества вершин графов C_n и C_m соответственно. Частично коммутативные метабелевы алгебры $M(X; C_n)$ и $M(Y; C_m)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$.*

Пусть $M(X; G)$ — частично коммутативная метабелева алгебра Ли с определяющим графом $G(X, E)$. Для вершины $x \in X$ графа G введем обозначение $x^{\perp} = \{y \,|\, d(x, y) \leqslant 1\}$, где под $d(x, y)$ подразумевается невзвешенное (то есть реберное) расстояние между вершинами x и y. Введем на вершинах графа G отношение $\sim_{\perp}$, полагая $x \sim_{\perp} y$, в том и только том случае, когда $x_{\perp} = y_{\perp}$. Это отношение, очевидно, является отношением эквивалентности. Класс $\sim_{\perp}$-эквивалентности, содержащий элемент x будем обозначать $\widetilde{X}_x$.

Так как из $x \sim_{\perp} y$, в частности, следует, что $x \leftrightarrow y$; эти вершины входят в одну и ту же компоненту связности любого подграфа графа G, содержащего обе эти вершины.

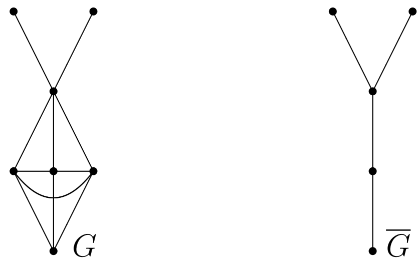


Рис. 2: Граф G и его сжатие $\overline{G}$

Теорема 2. *Пусть X — конечное множество вершин графа G. Предположим, что существует $x \in X$, такой что класс $\sim_\perp$-эквивалентности $\widetilde{X}_x$ содержит более одного элемента. Наконец, пусть $X' = X \backslash x$ и $G' = G(X')$. Тогда алгебры $M(X;G)$ и $M(X';G')$ универсально эквивалентны.*

Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — некоторый граф. Рассмотрим классы эквивалентности этого графа относительно отношения $\sim_\perp$. Из теоремы 2 следует , что в этом случае полученные частично коммутативные метабелевы алгебры Ли с определяющими графами G и G' универсально эквивалентны. Более того, легко видеть, что для любого отношения эквивалентности справедливо следующее утверждение. Если из какого-нибудь класса класса эквивалентности, удалить элемент, то все остальные элементы этого класса так и останутся в одном классе эквивалентности, а остальные классы эквивалентности совсем не изменятся. Таким образом, если в полученном графе есть классы $\sim_\perp$-эквивалентности, содержащие более одной вершины, то можно снова удалить одну из вершин этого класса и получить частично коммутативную метабелеву алгебру Ли, имеющую ту же универсальную теорию, что и исходная, и так далее.

Таким образом, для любого графа G в каждом классе эквивалентности можно удалить все вершины, кроме одной, при этом универсальные теории метабелевых алгебр Ли, соответствующих исходному и конечному графам, совпадают. Полученный в итоге граф называется *сжатием* графа G (обозначим его $\overline{G}$).

На рис. 2 изображен пример двух графов, имеющих одинаковые универсальные теории, один из которых является деревом, а второй — нет. В заключение, отметим что обращение теоремы 2 неверно в том смысле, что даже если алгебры $M(X;G)$ и $M(Y;H)$ универсально эквивалентны, это еще не означает, что граф H можно получить из графа G добавлением или удалением вершин в классы $\sim_\perp$-эквивалентности.

Действительно, нетрудно видеть, что все сжатия графа изоморфны. С другой стороны, сжатием дерева является само это дерево. Однако в [14] было показано, что если определяющие графы двух частично коммутативных метабелевых алгебр являются деревьями, то эти деревья могут быть неизоморфны даже если соответствующие алгебры универсально эквивалентны.

Список литературы

[1] Порошенко Е. Н., О базисах частично коммутативных алгебр Ли, Алгебра и логика, **50**, №5 (2011), 595–614.

[2] Порошенко Е. Н., Централизаторы в частично коммутативных алгебрах Ли, Алгебра и логика, **51**, №4, 2012, 524–554.

[3] Тимошенко Е. И., Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, **49**, 2 (2010), 263–290.

[4] Тимошенко Е. И., Мальцевская база частично коммутативной нильпотентной, метабелевой группы, Алгебра и логика, **50**, №5 (2011), 647–658.

[5] Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И., Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность, Алгебра и логика, **48**, 3 (2009), 309–341.

[6] Шестаков С. Л., Уравнение $[x, y] = g$ в частично коммутативных группах, Сиб. мат. журн., **46**, 2 (2005), 466—477.

[7] Шестаков С. Л., Уравнение $x^2y^2 = g$ в частично коммутативных группах, Сиб. мат. журн., **47**, 2 (2006), 463—472.

[8] Cartier F., Foata D., Problems combinatorics de computation et rearrangements, Lecture Notes in Mathematics, 85, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[9] Gupta Ch. K., Timoshenko E. I., Universal Theories for Partially Commutative Metabelian Groups, Algebra and Logic, **50**, 1 (2011), 3-25.

[10] Duchamp G., Krob D., The lower central ceries of the free partially commutative group, Semigroup Forum, **45** (1992), 385-–394.

[11] Duchamp G., Krob D., The Free Partially Commutative Lie Algebra: Bases and Ranks, Advances in Mathematics, **92**, 1992, 95–126.

[12] Duncan A. J., Kazachkov I. V., Remeslennikov V. N. Parabolic and quasiparabolic subgroups of free partially commutative groups, Journal of Algebra, **318**, 2 (2007), 918–932.

[13] Kim, K. H., Makar-Limanov, L., Neggers, J., Roush, F. W., Graph algebras, Journal of Algebra, **64** (1980), 46–51.

[14] Poroshenko E.,Timoshenko E., Universal Equivalence of Partially Commutative Metabelian Lie Algebras, J. Algebra, 2013, 143–168.

[15] Servatius H., Automorphisms of graph groups, J. Algebra, **126**, 1 (1989), 34-–60.

ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И СЕЛЕКТИВНЫЕ МАТРИЦЫ

Л.А. Шоломов*

Институт системного анализа РАН,
просп. 60-летия Октября, 9, Москва, 117312, Россия
e-mail: sholomov@isa.ru

Будем рассматривать матрицы Λ над $\{0,1\}$ и использовать обозначения λ_i, $i = 0,1,\ldots,m-1$, для столбцов матрицы, $\lambda(v)$, $v = 1,\ldots,s$, для строк, $\lambda_i(v)$ для элементов. Положим $M = \{0,1,\ldots m-1\}$. Будем говорить, что *множество столбцов T, $T \subseteq M$, покрывает столбец j*, если $\bigvee_{i\in T}\lambda_i \geq \lambda_j$, где дизъюнкция столбцов выполняется поразрядно.

Пусть задана некоторая система $\mathcal{T}$ непустых подмножеств T множества M. Матрицу назовем *$\mathcal{T}$-дизъюнктивной*, если для любых $T \in \mathcal{T}$ и $j \notin T$ множество столбцов T не покрывает столбец j. Если $\mathcal{T}$ состоит из всех t-элементных подмножеств множества M, матрица называется *t-дизъюнктивной*. Последние введены в работе [1] как средство описания дизъюнктивных (superimposed) кодов. Эти коды широко применяются в задачах прикладной математики и информатики — см., например, [1, 2, 3, 4] и цитированные там источники. $\mathcal{T}$-дизъюнктивные матрицы общего вида встречались в [5].

Свойство $\mathcal{T}$-дизъюнктивности позволяет выделить в матрице любое множество столбцов $T \in \mathcal{T}$, указав их дизъюнкцию. Двойственным образом можно ввести понятие *$\mathcal{T}$-конъюнктивной матрицы*, в которой для любых $T \in \mathcal{T}$ и $j \notin T$ конъюнкция столбцов множества T не покрывается столбцом j. В этом случае любое множество столбцов $T \in \mathcal{T}$ можно выделить, указав их конъюнкцию. Опишем более общий класс матриц, включающий оба эти класса.

Набор $\dot{\lambda}_T$ длины s, составленный из булевых элементов 0, 1 и *неопределенного* элемента $*$ назовем *T-селектором* матрицы Λ, если все столбцы множества T являются его *доопределниями* (т. е. получаются заменой в нем всех $*$ булевыми элементами) и никакой другой столбец матрицы его не доопределяет. Матрицу Λ назовем *$\mathcal{T}$-селективной*, если при каждом $T \in \mathcal{T}$ для нее существует T-селектор. В $\mathcal{T}$-селективной матрице любое множество столбцов $T \in \mathcal{T}$ можно выделить, указав T-селектор.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ОНИТ РАН

Ясно, что в $\mathcal{T}$-селективной матрице Λ в качестве T-селектора может быть взят набор $\dot{\lambda}_T$, для которого компонента $\dot{\lambda}_T(v)$, $v = 1, \ldots, s$, равна $\tau \in \{0, 1\}$, если $\lambda_i(v) = \tau$ для всех $i \in T$, и равна $*$, если найдутся $i, j \in T$, для которых $\lambda_i(v) \neq \lambda_j(v)$. Этот T-селектор будем называть *каноническим.* При интерпретации столбцов матрицы как точек булева куба $\{0, 1\}^s$, а наборов из $\{0, 1, *\}^s$ как его подкубов, каноническому T-селектору соответствует минимальный подкуб, натянутый на множество столбцов T.

Утверждение 1. *$\mathcal{T}$-дизъюнктивная и $\mathcal{T}$-конъюнктивная матрицы $\mathcal{T}$-селективны.*

В качестве T-селектора для $\mathcal{T}$-дизъюнктивной матрицы может быть взят набор, полученный из $\bigvee_{i \in T} \lambda_i$ заменой всех 1 элементом $*$, а для $\mathcal{T}$-конъюнктивной матрицы — набор, образованный из $\bigwedge_{i \in T} \lambda_i$ заменой элементом $*$ всех 0. □

Класс $\mathcal{T}$-селективных матриц не исчерпывается $\mathcal{T}$-дизъюнктивными и $\mathcal{T}$-конъюнктивными. Примером 2-селективной, но не 2-дизъюнктивной и не 2-конъюнктивной матрицы является

λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1

.

$\mathcal{T}$-селективные, $\mathcal{T}$-дизъюнктивные и $\mathcal{T}$-конъюнктивные матрицы естественным образом возникают в задаче *двоичного представления недоопределенных данных.* Введем соответствующие понятия.

Задан алфавит $A_0 = \{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ *основных символов.* Каждому непустому $T \subseteq M$, $M = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, соответствует символ a_T, называемый *недоопределенным.* Его *доопределением* считается всякий основной символ a_i, $i \in T$. Выделена некоторая система $\mathcal{T}$ непустых подмножеств T множества M и с ней связан *недоопределенный алфавит* $A = A_{\mathcal{T}} = \{a_T \mid T \in \mathcal{T}\}$. Подробнее о недоопределенных данных в [6].

Задавшись натуральным числом s, припишем некоторым образом каждому $a_i \in A_0$ набор $\lambda_i \in \{0, 1\}^s$ — *код символа* a_i, а каждому $a_T \in A$ — набор $\lambda_T \in \{0, 1, *\}^s$. Обозначим через Λ матрицу со столбцами λ_i, $i \in M$, а через $\tilde{\Lambda}$ — матрицу со столбцами λ_T, $T \in \mathcal{T}$. Скажем, что пара $(\Lambda, \tilde{\Lambda})$ задает *двоичное представление алфавита* A, если для любых $T \in \mathcal{T}$ и $i \in M$

$$\lambda_i \text{ } \textit{доопределяет} \text{ } \lambda_T \Leftrightarrow i \in T.$$

В представлениях рассматриваемого вида недоопределенным последовательностям в алфавите A соответствуют недоопределенные двоичные последовательности, использующие фактически трехбуквенный алфавит $\{0, 1, *\}$. Двоичное представление $(\Lambda, \tilde{\Lambda})$ алфавита A назовем *строго двоичным*, если $\tilde{\Lambda}$ — матрица в двухбуквенном алфавите. Этим алфавитом может быть $\{0, *\}$ либо $\{1, *\}$. Если потребуется различать эти случаи, будем говорить о строгих 0-представлениях и строгих 1-представлениях.

Утверждение 2. *Всякий алфавит A строго 0-представим и строго 1-представим (а потому двоично представим).*

Строгое 1-представление, например, можно получить, назначив $s = m$ и взяв в качестве λ_i, $i \in M$, набор $(\lambda_i(v),\ v = 1, \dots, m)$, в котором компонента $\lambda_i(v)$ равна 0 для $v - 1 = i$ и равна 1 для $v - 1 \neq i$, а в качестве λ_T, $T \in \mathcal{T}$, — набор $(\lambda_T(v),\ v = 1, \dots, m)$, в котором компонента $\lambda_T(v)$ равна 1 для $v - 1 \notin T$ и равна $*$ для $v - 1 \in T$. □

Матрицу Λ назовем (i) *допустимой*, (ii) *строго* 0-*допустимой*, (iii) *строго* 1-*допустимой* для алфавита A, если для A существует (i) двоичное представление, (ii) строгое 0-представление, (iii) строгое 1-представление $(\Lambda, \tilde{\Lambda})$ с матрицей кодирования Λ.

Теорема 3. *Матрица Λ (i) допустима, (ii) строго 0-допустима, (iii) строго 1-допустима для алфавита $A = A_{\mathcal{T}}$ тогда и только тогда, когда она (i) $\mathcal{T}$-селективна, (ii) $\mathcal{T}$-дизъюнктивна, (iii) $\mathcal{T}$-конъюнктивна.*

Доказательство. (i) Если Λ $\mathcal{T}$-селективна, то в качестве столбцов матрицы $\tilde{\Lambda}$ двоичного представления $(\Lambda, \tilde{\Lambda})$ может быть взята матрица, образованная T-селекторами $\dot{\lambda}_T$, и, наоборот, если представление $(\Lambda, \tilde{\Lambda})$ существует, то роль T-селекторов $\dot{\lambda}_T$ могут играть столбцы матрицы $\tilde{\Lambda}$.

(ii) Если строгое 0-представление с матрицей кодирования Λ существует, то у Λ при каждом $T \in \mathcal{T}$ имеется некоторый T-селектор $\dot{\lambda}_T$ в алфавите $\{0, *\}$. Столбцы множества T доопределяют его и их единицы находятся в позициях, где $\dot{\lambda}_T$ принимает значение $*$. Любой другой столбец содержит 1 в некотором нулевом разряде T-селектора $\dot{\lambda}_T$ и потому не покрывается столбцами множества T. Это означает $\mathcal{T}$-дизъюнктивность матрицы.

Обратно, для всякой $\mathcal{T}$-дизъюнктивной матрицы при любом $T \in \mathcal{T}$ существует T-селектор в алфавите $\{0, *\}$, указанный при доказательстве утверждения 1. Их совокупность образует матрицу, которая вместе с исходной матрицей задает строгое 0-представление.

Случай (iii) аналогичен (ii). □

Под *инверсией* булева набора и булевой матрицы понимается результат замены в них всех элементов отрицаниями. Ясно, что матрица $\mathcal{T}$-конъюнктивна тогда и только тогда, когда ее инверсия $\mathcal{T}$-дизъюнктивна, поэтому будем вместо двух типов матриц рассматривать лишь $\mathcal{T}$-дизъюнктивные, а под строгими представлениями понимать 0-представления.

Поскольку столбец t-дизъюнктивной матрицы не покрывается t другими, такие матрицы также называют *свободными от t-покрытий* (t-cover-free) [7]. $\mathcal{T}$-дизъюнктивные матрицы естественно называть *свободными от $\mathcal{T}$-покрытий.* Представим в аналогичных терминах понятие $\mathcal{T}$-селективности. Будем говорить, что некоторое множество наборов *инверсно покрывает* набор λ, если множество инверсий этих наборов покрывает инверсию набора λ. Множество наборов *дважды покрывает* набор λ, если оно покрывает и инверсно покрывает набор λ. Матрицу Λ назовем *свободной от двойных $\mathcal{T}$-покрытий*, если для любого $T \in \mathcal{T}$ множество столбцов λ_i, $i \in \mathcal{T}$, не покрывает дважды ни одного столбца, не входящего в это множество.

Теорема 4. *Матрица Λ $\mathcal{T}$-селективна тогда и только тогда, когда она свободна от двойных $\mathcal{T}$-покрытий.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу Λ и построенную по ней матрицу $\dot{\Lambda}$, образованную каноническими T-селекторами, $T \in \mathcal{T}$. Убедимся, что столбец λ_j доопределяет столбец $\dot{\lambda}_T$ тогда и только тогда, когда совокупность столбцов λ_i, $i \in T$, дважды покрывает λ_j. Пусть λ_j доопределяет $\dot{\lambda}_T$. Если для некоторой позиции v имеет место $\lambda_j(v) = \tau$, то $\dot{\lambda}_T(v) \in \{*, \tau\}$ и по построению $\dot{\Lambda}$ найдется $i \in T$, для которого $\lambda_i(v) = \tau$. Применив это рассуждение ко всем позициям v с $\tau = 1$, заключаем, что множество столбцов λ_i, $i \in T$, покрывает λ_j. Аналогичное рассмотрение позиций с $\tau = 0$ показывает, что множество инверсий этих столбцов покрывает инверсию столбца λ_j. Это означает, что покрытие двойное. Доказательство в другую сторону проводится обращением этих рассуждений.

Матрица Λ $\mathcal{T}$-селективна тогда и только тогда, когда алфавит $A_{\mathcal{T}}$ представим парой $(\Lambda, \dot{\Lambda})$. Это означает, что для $T \in \mathcal{T}$ ни один из столбцов λ_j, $j \notin T$, не доопределяет столбец $\hat{\lambda}_T$ и по доказанному выше не покрывается дважды множеством столбцов T. $\square$

Если матрица Λ допустима (строго допустима) для алфавита $A_{\mathcal{T}}$, то по теореме 3 она $\mathcal{T}$-селективна ($\mathcal{T}$-дизъюнктивна) и для представления символов a_T алфавита $A_{\mathcal{T}}$ могут быть использованы T-селекторы матрицы Λ, которые находятся эффективно (полиномиально). Тем самым задача нахождения двоичных представлений и строгих представлений недоопределенных алфавитов сводится к задачам построения соответствующих $\mathcal{T}$-селективных и $\mathcal{T}$-дизъюнктивных матриц. Для построения полезна приводимая ниже теорема.

Скажем, что система $\mathcal{Z}$ подмножеств множества M образует *конъюнктивный базис* системы $\mathcal{T}$, если каждое множество $T \in \mathcal{T}$ может быть получено как пересечение некоторых множеств из $\mathcal{Z}$, и образует *обобщенный конъюнктивный базис*, если каждое $T \in \mathcal{T}$ может быть получено как пересечение каких-либо множеств из $\mathcal{Z}$ либо их дополнений (до M). Считаем, что пересечение пустой совокупности множеств дает M, так что M конъюнктивно порождаемо любой системой $\mathcal{Z}$.

Строке $\lambda(v)$ матрицы Λ сопоставим множество $Z_v = \{i \mid \lambda_i(v) = 1\}$. Положим $\mathcal{Z}_\Lambda = \{Z_1, \dots, Z_s\}$, $\mathcal{Z}'_\Lambda = \{\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_s\}$, где $\bar{Z} = M \setminus Z$.

Теорема 5. *Матрица* Λ
(i) $\mathcal{T}$*-селективна тогда и только тогда, когда система множеств* $\mathcal{Z}_\Lambda$ *образует обобщенный конъюнктивный базис системы* $\mathcal{T}$*,*
(ii) $\mathcal{T}$*-дизъюнктивна тогда и только тогда, когда система множеств* $\mathcal{Z}'_\Lambda$ *образует конъюнктивный базис системы* $\mathcal{T}$*.*

Доказательство. Ограничимся случаем (i).

Для $Z \subseteq M$ и $\tau \in \{0,1\}$ под Z^τ будем понимать Z при $\tau = 1$ и $\bar{Z} = M \setminus Z$ при $\tau = 0$. Пусть матрица Λ является $\mathcal{T}$-селективной, $\dot{\Lambda}$ — матрица, образованная каноническими T-селекторами. Рассмотрим произвольное $T \in \mathcal{T}$. Положим $V_T = \{v \mid \dot{\lambda}_T(v) \neq *\}$ и убедимся, что

$$T = \bigcap_{v \in V_T} Z^{\dot{\lambda}_T(v)}. \tag{1}$$

Если множество V_T пусто, то столбец $\dot{\lambda}_T$ образован элементами $*$. В этом случае $T = M$ и равенство (1) выполнено в силу соглашения относительно пересечения пустой системы множеств.

Пусть теперь $V_T \neq \emptyset$. Для любого $i \in T$ столбец λ_i доопределяет $\dot{\lambda}_T$ и, следовательно, при каждом $v \in V_T$ выполнено $\lambda_i(v) = \dot{\lambda}_T(v)$. Это означает, что i содержится в каждом множестве $Z_v^{\dot{\lambda}_T(v)}$, $v \in V_T$, а потому и в их пересечении. С учетом произвольности $i \in T$ заключаем, что T включено в пересечение из правой части (1). Обратное включение вытекает из того, что для всякого $j \notin T$ столбец λ_j не является доопределением столбца $\dot{\lambda}_T$, т. е. при некотором $v \in V_T$ имеет место $\lambda_j(v) \neq \dot{\lambda}_T(v)$, а потому $j \notin Z_v^{\dot{\lambda}_T(v)}$ и j не содержится в пересечении из (1). Равенство (1) показывает, что система $\mathcal{Z}_\Lambda$ образует обобщенный конъюнктивный базис для $\mathcal{T}$.

Обратно, пусть $\mathcal{Z}_\Lambda$ является обобщенным конъюнктивным базисом системы $\mathcal{T}$. Всякое множество $T \in \mathcal{T}$ представимо в виде пересечения некоторых множеств Z_v или их дополнений. Фиксируем одно из таких представлений и обозначим через V_T совокупность индексов v участвующих в нем множеств Z_v. Для $v \in V_T$ положим $\lambda_T(v)$ равным 1 или 0 в зависимости от того, в какой из форм Z_v или $\bar{Z}_v$ входит в пересечение это множество, а для $v \notin V_T$ положим $\lambda_T(v) = *$. Тогда

$$T = \bigcap_{v \in V_T} Z^{\lambda_T(v)}.$$

Отсюда аналогично предыдущему можно заключить, что набор с компонентами $\lambda_T(v)$, $v = 1, \ldots, s$, является T-селектором матрицы Λ и она $\mathcal{T}$-селективна. $\square$

Обозначим через $s(\mathcal{T})$ минимальное число строк $\mathcal{T}$-селективной матрицы. Введем функцию $s(m,n,t)$, равную максимуму значений $s(\mathcal{T})$ по всем системам $\mathcal{T}$ над $M = \{0,1,\ldots,m-1\}$, состоящим из n множеств T, каждое из которых имеет мощность не выше t, либо совпадает с M. Аналогичные величины для $\mathcal{T}$-дизъюнктивных матриц будем обозначать $s_0(\mathcal{T})$ и $s_0(m,n,t)$. В терминах недоопределенных данных ограничения на T означают, что рассматриваются недоопределенные алфавиты, символы которых либо не определены, либо имеют не более t доопределений.

Теорема 6. *Справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
s(m,n,2) &\le 4\ln(mn)+1, && (2)\\
s_0(m,n,2) &\le 6.75\ln(mn)+1, && (3)\\
s(m,n,3) &\le 8\ln(mn)+1, && (4)\\
s_0(m,n,3) &\le 9.48\ln(mn)+1, && (5)\\
s(m,n,t) \le s_0(m,n,t) &\le e(t+1)\ln(mn)+1. && (6)
\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим вначале функцию $s(m,n,t)$, относящуюся к селективным матрицамю

Пусть $\mathcal{T}$ — произвольная система с параметрами m, n и t. Согласно теореме 5 достаточно оценить сверху мощность обобщенного конъюнктивного базиса для системы $\mathcal{T}$. Поскольку множество M реализуется автоматически (как пустое пересечение), можно считать, что $M \notin \mathcal{T}$ и $|T| \le t$ для любого $T \in \mathcal{T}$.

Пары (T,j), $j \in M \setminus T$, будем называть *фрагментами*. Скажем, что множество Z *реализует* фрагмент (T,j) *прямо*, если $T \subseteq Z$, $j \notin Z$, и реализует *инверсно*, если $T \cap Z = \emptyset$, $j \in Z$. Множество *реализует* фрагмент, если оно его реализует прямо или инверсно. Ясно, что система $\mathcal{Z}$ образует обобщенный конъюнктивный базис для $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда множествами системы $\mathcal{Z}$ реализуются все фрагменты (T, j), $T \in \mathcal{T}$, $j \in M \setminus T$. Мощность системы с указанным свойством оценим вероятностным методом.

Рассмотрим систему s случайных подмножеств множества M, в каждое из которых элементы $i \in M$ включаются независимо с одинаковой вероятностью p, которая будет выбрана позже. Вероятность того, что случайное множество реализует заданный фрагмент (T, j), составляет $p^{|T|}(1-p) + (1-p)^{|T|}p$, а вероятность, что ни одно из s множеств системы его не реализует, равна $\bigl(1 - (p^{|T|}(1-p) + (1-p)^{|T|}p)\bigr)^s$. Эта величина не превосходит $\bigl(1 - (p^t(1-p) + (1-p)^t p)\bigr)^s$. Поскольку число фрагментов меньше $|\mathcal{T}| \cdot |M| = nm$, вероятность отсутствия реализации хотя бы у одного из них меньше

$$mn\bigl(1 - (p^t(1-p) + (1-p)^t p)\bigr)^s.$$

Отсюда и из соотношения $\ln(1-x) \le -x$ следует, что при любом

$$s \ge \frac{\ln(mn)}{p^t(1-p) + (1-p)^t p}$$

эта вероятность меньше 1 и, следовательно, существует обобщенный конъюнктивный базис такой мощности. Это дает

$$s(m, n, t) \le \frac{\ln(mn)}{\psi_t(p)} + 1, \tag{7}$$

где $\psi_t(p) = p^t(1-p) + (1-p)^t p$.

Выберем значение p. Для $t = 2$ и $t = 3$ функция $\psi_t(p)$ достигает максимума при $p = 1/2$. Подстановка этого значения в (7) приводит к оценкам (2) и (4). При произвольном t с учетом того, что $\psi_t(p) \ge p^t(1-p)$ и величина $p^t(1-p)$ при $p = t/(t+1)$ принимает значение $t^t/(t+1)^{t+1}$, имеем

$$\psi_t\Bigl(\frac{t}{t+1}\Bigr) \ge \frac{t^t}{(t+1)^{t+1}} \ge \frac{1}{e(t+1)}.$$

Подставляя эту оценку в (7), приходим к (6).

Оценка функции $s_0(m, n, t)$ проводится тем же способом, но вместо $\psi_t(p)$ в формуле (7) возникает функция $\psi_t^0(p) = p^t(1-p)$. При оценке $s(m, n, t)$ фактически использовалась функция $\psi_t^0(p)$, поэтому для $s_0(m, n, t)$ оценка сохраняет тот же вид. Константы в (3) и (5) находятся прямым подсчетом при $p = 2/3$ и $p = 3/4$. $\square$

Отметим, что для t-дизъюнктивных (и t-селективных) матриц $n = \binom{m}{t} \le (me/t)^t$, и потому из (6) получается верхняя оценка

$$s_0(m,t) \le e(t+1)^2\bigl(\ln\frac{m}{t}+2\bigr). \tag{8}$$

минимального числа строк t-дизъюнктивной матрицы с m столбцами. Подобные оценки для t-дизъюнктивных матриц были установлены методом случайного кодирования многими авторами (напр., в [2, 3, 7, 8]), но способ получения путем сведения к конъюнктивным базисам ранее не использовался.

Впервые нетривиальная (немощностная) и к данному моменту наилучшая нижняя оценка для $s_0(m,t)$ установлена в [2]. Она относится к случаю $t = \mathrm{const}$, $m \to \infty$ и может быть представлена в виде[1]

$$s_0(m,t) \gtrsim \frac{t^2 \log m}{2\log t + c}, \quad c = \log\frac{3e}{4} < 1.027. \tag{9}$$

Эта оценка доказывается достаточно сложно индукцией по t. Позднее в работе [9] было найдено чисто комбинаторное доказательство в 4 раза более слабой оценки. Затем в заметке [10] было представлено очень простое комбинаторное доказательство оценки, которая хуже (9) в 2 раза. Она вытекает из установленного в [10] соотношения

$$m \le t + \binom{s}{\left\lceil \frac{2(s-t)}{t(t+1)} \right\rceil}, \tag{10}$$

связывающего число столбцов m и число строк s t-дизъюнктивной матрицы. При получении нижних оценок функций $s_0(m,n,t)$ и $s(m,n,t)$ это неравенство будет играть важную роль.

Теорема 7. *При выполнении условия*

$$t = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right) \tag{11}$$

справедливы оценки

$$s_0(m,n,t) \gtrsim \frac{(t+1)\log n}{2(2\log t + c)}, \tag{12}$$

$$s(m,n,t) \gtrsim \frac{(t-1)\log n}{2(2\log(t-1) + c)}, \tag{13}$$

где c — константа из (9).

[1] Всюду под $\log x$ понимается $\log_2 x$.

Доказательство. 1. Начнем со случая функции $s_0(m, n, t)$.

Поскольку n не првосходит числа подмножеств множества M, имеющих мощность не выше t, справедливо неравенство

$$n \leq \sum_{u \leq t} \binom{m}{u}. \tag{14}$$

Пусть m' — максимальное значение, удовлетворяющее условию

$$n \geq \sum_{u \leq t} \binom{m'}{u}.$$

Очевидно, что $m' \leq m$. В силу максимальности m' выполнено

$$n \leq \sum_{u \leq t} \binom{m'+1}{u} \leq (m'+1)^t.$$

Отсюда с учетом (11) получаем[2]

$$\log(m'+1) \geq \frac{\log n}{t} \gg \log\log n, \tag{15}$$

а потому

$$m' \gg \log n \gg t. \tag{16}$$

Положим $M' = \{0, 1, \ldots, m'-1\}$ и возьмем в качестве $\mathcal{T}$ некоторую систему, которая состоит из n подмножеств множества M мощности не выше t и включает все t-элементные подмножества множества M'. Рассмотрим произвольную $\mathcal{T}$-дизъюнктивную матрицу Λ, первые m' столбцов которой соответствуют элементам множества M'. Эти столбцы образуют t-дизъюнктивную матрицу и для нее справедливо соотношение (10). В силу тривиальной нижней оценки $s \geq \log n$ и условия (11) выполнено $s \gg t$. Прологорифмировав (10), получаем с учетом неравенства $\log \binom{u}{v} \leq \log \frac{eu}{v}$ и соотношений (15), (16) и $s \gg t$

$$\frac{\log n}{t} \lesssim \log m' \lesssim \left(\frac{2s}{t(t+1)} + 1\right) \log \frac{et(t+1)}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{2s}{t(t+1)} + 1 \gtrsim \frac{\log n}{t \log \frac{et(t+1)}{2}}. \tag{17}$$

[2]Соотношение $u \gg v$ означает $v = o(u)$.

Так как в силу (11) выполнено

$$\frac{\log n}{t\log\dfrac{et(t+1)}{2}} \gg \frac{\log n}{\left(\dfrac{\log n}{\log\log n}\right)\log\log n} = 1,$$

из (17) находим

$$s \gtrsim \frac{t(t+1)\log n}{2t\log\dfrac{et(t+1)}{2}} = \frac{(t+1)\log n}{2\left(2\log t + \log\dfrac{(t+1)e}{2t}\right)} \geq \frac{(t+1)\log n}{2\left(2\log t + \log\dfrac{3e}{4}\right)}.$$

Отсюда следует (12).

2. Рассмотрим теперь случай функции $s(m,n,t)$.

2-1. Пусть вначале тройка $(m-1,n,t-1)$ является допустимой, т. е. существует система $\mathcal{T}$ с такими параметрами. Покажем, что в этом случае

$$s(m,n,t) \geq s_0(m-1,n,t-1). \tag{18}$$

Пусть $\mathcal{T}$ — произвольная система с параметрами $(m-1,n,t-1)$ на множестве $M=\{0,1,\ldots,m-2\}$. Положим $M'=\{0,\ldots,m-2,m-1\}$. Путем добавления к каждому множеству T системы $\mathcal{T}$ элемента $m-1$ образуем множества T' и систему всех таких множеств обозначим через $\mathcal{T}'$. Она имеет параметры (m,n,t).

Рассмотрим $\mathcal{T}'$-селективную матрицу, на которой достигается $s(\mathcal{T}')$. Путем инверсирования ее строк добьемся того, чтобы столбец, соответствующий элементу $m-1$, общему для всех множеств T', стал нулевым; полученную матрицу обозначим Λ'. Все T'-селекторы матрицы Λ' являются наборами в алфавите $\{0,*\}$ и потому она T'-дизъюнктивна. Матрица Λ, образованная из Λ' удалением нулевого столбца, T-дизъюнктивна. В результате получаем

$$s_0(\mathcal{T}) \leq s(\Lambda) = s(\Lambda') = s(\mathcal{T}') \leq s(m,n,t).$$

Учитывая произвольность системы $\mathcal{T}$ с параметрами $(m-1,n,t-1)$, приходим к неравенству(18), которое совместно с (12) обеспечивает в рассматриваемом случае оценку

$$s(n,m;t) \gtrsim \frac{t\log n}{2(2\log(t-1)+c)}. \tag{19}$$

2-2. Пусть тройка $(m-1,n,t-1)$ не допустима. Положим

$$n' = \sum_{u\leq t-1}\binom{m-1}{u}.$$

Тройка $(m-1, n', t-1)$ допустима и справедливо неравенство $n > n'$. Параметр n удовлетворяет условию (14). Правая часть (14) в силу соотношения $\binom{m}{u} < m\binom{m-1}{u-1}$ не превосходит tmn'. Поэтому $n \le tmn'$. Логарифмируя это неравенство и учитывая (11), получаем

$$\log n \lesssim \log m + \log n'. \tag{20}$$

Из (14) вытекает, что $n \le m^t$, а потому $\log n \le t \log m$. Подстановка этого соотношения в (20) дает $t \log n' \gtrsim (t-1)\log n$. С учетом этого из оценки (19), примененной к допустимой тройке $(m-1, n', t-1)$, вытекает цепочка соотношений

$$s(m,n,t) \ge s(m,n',t) \gtrsim \frac{t\log n'}{2(2\log(t-1)+c)} \gtrsim \frac{(t-1)\log n}{2(2\log(t-1)+c)},$$

приводящая к (13). □

Замечание 8. *При растущем t и естественном условии $m \le n$ верхняя и нижняя оценки функции $s(m,n,t)$ из теорем 6 и 7 различаются по порядку в $\log t$ раз. То же справедливо для верхней и нижней оценок функции $s_0(m,n,t)$.*

Замечание 9. *Для любой конкретной системы $\mathcal{T}$ справедливы соотношения*

$$\frac{1}{2}s_0(\mathcal{T}) \le s(\mathcal{T}) \le s_0(\mathcal{T}).$$

Правое неравенство очевидно, а левое следует из того, что в результате добавления к строкам $\mathcal{T}$-селективной матрицы их инверсий получается $\mathcal{T}$-дизъюнктивная матрица с удвоенным числом строк. □

Список литературы

[1] Kautz W. H., Singleton R. C. Nonrandom binary superimposed codes // IEEE Transactions of Information Theory. — 1964. — Vol. 10, No 4. — P. 363–377.

[2] Дьячков А. Г., Рыков В. В. Границы длины дизъюнктивных кодов // Проблемы передачи информации. — 1982. — Т. 18, вып. 3. — С. 7–13.

[3] Kumar R., Rajagopalan S., Sahai A. Coding construction for blacklisting problems without computational assumptions // CRYPTO-99. Lecture Notes in Computer Science, vol. 1666. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. — P. 609–623.

[4] Porat E., Rotshchild A. Explicit non-adaptive combinatorial group testing schemes //Automata, Languages and Programming. Lecture Notes in Computer Science, vol. 5125. — Springer, 2008. — P. 748–759.

[5] Коспанов Э. Ш. О кодировании (0,1)-матриц конъюнкциями // Дискретный анализ. Сборник трудов. Вып. 27. — Новосибирск: Институт математики СО АН, 1975. — С. 17–22.

[6] Шоломов Л. А. Элементы теории недоопределенной информации // Прикладная дискретная математика. Приложение №2. — 2009. — С. 18–42.

[7] Erdos P., Frankl P., Furedi Z. Families of finite sets in which no set is covered by the union of r others // Israel Journal of Mathematics. — 1985. — Vol. 51, Nos 1–2. — P. 79–89.

[8] Cheng V., Du D.-Z., Lin G. On the upper bounds of the minimum number of rows of disjunct matrices // Optimization Letters. — 2009. Vol. 3, Issue 2. — P. 297–302.

[9] Ruszinko M. On the upper bound of the size of the r-cover-free families // Journal of Combinatorial Theory. Ser. A. — 1994. — Vol. 66. — P. 302–310.

[10] Furedi Z. On r-cover-free families // Journal of Combinatorial Theory. Ser. A. — 1996. — Vol. 73. — P. 172–173.

SEARCHING FOR A DIFFERENT PERSPECTIVE ON GROUPS: SOME PHILOSOPHICAL REFLECTIONS

Irina Starikova

University of Bristol,
43, Woodlands Road, BS8 1UU, Bristol, UK
e-mail: starikova.irina@gmail.com

Introduction

Over the recent decade a number of publications stressed the epistemic values of cognitive representations in mathematics such as visualisations and thought experiments. These publications argue for their epistemic roles in understanding and explaining mathematical facts [Mancosu:2007, 2008], [Manders:2008a, 2008b]; mathematical discovery [Giaquinto:2007]; and perhaps the strongest role that of justification [Brown:1999]. They provide case studies against the oversimplified view that visualisations are superfluous and can always be reduced to a logical argument. This view underestimates the epistemic advance of the visual such as emergence of new style of thinking and developing of new concepts. For instance, in his unpulished paper [Manders:1999] demonstrates that in the case of Descartes' algebraisation of geometry the change from diagrams to symbols enables fast algebraic calculations and more importantly, the introduction of the new concept, the degree of an equation, and the equations solving technique.

This paper contributes an analogous example, that is when the change in representation facilitates the application. However this time the direction is reverse: i.e. diagrams help to apply geometry to algebra. The case study demonstrates how useful geometric properties of groups can be revealed through visualising them as graphs and then as spatial objects (metric spaces).

For the analysis of this example, I apply the approach proposed by [Manders:1999] for the Descartes' example mentioned above. He considers mathematical practice as control of the *selective* response to given information, where selective response means *emphasising* some properties of an object while *neglecting* others. From this perspective, representations serve to implement the principal constituents of selective responses. This approach makes clear that a change in representation is a valuable means of finding new properties. A detailed research of these issues is presented in [Starikova:2011, Starikova:2012].

1 The approach: the role of representations and selective responses

In mathematical reasoning we often *produce* and *respond to* artefacts or representations: diagrams, formulas, thought experiments and natural language expressions. According to [Manders:1999], artefacts help to *implement* and *control* selective responses. Representations also provide new responses, suitable for the current context: e.g. recognition of a region bounded by three sides. They also make the representations available for further steps: e.g. drawing a line between two points. Therefore representations *fix* and *stabilise* the responses and indifferences to particular elements of a structure.

Manders points out that our control over (Euclidean) diagrams is limited. The Euclidean use of diagrams extensively relies on the *appearance* of the diagrams, which means that the diagrams have to be perceptually explicit and stable under the diagram perturbations. In the Euclidean style of using diagrams it is possible that some metric properties are unclear. For example, some segments or angles may appear as equal, when in fact they are non-equal. Also there is a risk of missing cases in Euclidean diagrammatic practice (e.g. the case of an obtuse triangle may be missed with considerable consequences).

Alternatively, Descartes' approach brings about a substantial advance in problem solving: after the equations are written down, all the calculations proceed quickly by means of efficient algebraic algorithms and become largely a "cut-and-dried matter" [Manders:1999, 28]. This is a case of *indifference* to the diagram and the *application* of an algebraic response – solving equations. Manders makes the important point that the introduction of algebraic notation helps us to apply the fast algebraic algorithms:

> Changing the artefact basis of part of the analytic process, to a representation (algebraic equations) indifferent to diagram appearance, allows all this progress towards solving problems, unimpeded by the difficulties of diagram control in Euclidean-style reasoning.[1]

[1] [Manders:1999, p. 18]

Therefore, in the case of an applicative approach, the representation facilitates the application. What is also beneficial, it endorses a new algebraic notion to geometry – the degree of an equation.

2 The case study: the geometric approach to groups

I shall start my case study with explaining the basics of the geometric approach to groups. Then I will analyse the role of visualisations in the terms of Manders' approach of strategic response and indifference. The geometric perspective on groups is not new. Groups were commonly seen as transformations of geometric objects, and this view was the core of Klein's Erlangen programme [Klein:1873] which aimed to classify and characterise geometries on the basis of group theory (and projective geometry). However, in this paper I discuss a new approach, which is based on the idea that groups *as such* can be thought of as geometric objects. I shall consider hyperbolic groups as an important application of this idea and then give it a philosophical analysis.

2.1 Generated groups

Traditionally groups are introduced as sets equipped with particular axioms. However, more structure can be endorsed via the notion of *generated* groups.

Definition. *Definition (generating set). Let G be a group. Then a subset $S \subseteq G$ is called a* generating set *for the group G if every element of G can be expressed as a product of the elements of S or the inverses of the elements of S.*

In other words, every element of G can be written as a composition of symbols (called *letters*) representing the elements of S and their inverses. A representation of a non-identity element s as a product of $n \geq 1$ letters is called a *word*. In a given word the number $n \in \mathbb{N}$ is called the *length* of the word. The word with the length equal to 0 is called an *empty* word and by definition it represents the group identity I. Other representations of I by words of length $n \geq 1$ are called group *relations*.

There may be several generating sets for the same group. For example, the subsets $\{1\}$ and $\{2, 3\}$ generate the group $(\mathbb{Z}, +)$, whereas $\{2\}$ does not.

Definition. *Definition (a finitely generated group). A group with a specified set of generators S is called a* generated group *and is designated as (G, S). If a group has a finite set of generators, it is called a* finitely generated group.

For example, the group $\mathbb{Z}$ with respect to the generating set $\{1\}$ designated as $(\mathbb{Z}, \{1\})$ is a finally generated group, whereas the group $(\mathbb{Q}, +)$ of rational numbers under addition is not.

2.2 Word metric

On the basis of letters and words one can introduce *word metric.*

Definition. *Definition (a word metric). If $g, h \in G$ then the word metric (with respect to S) $d_S(g, h)$ is the length of a shortest word representing $g^{-1}h$, where $g^{-1}h$ is a word w such that $gw = h$.*

The metric space $[(G, S), d_S]$ may not appear at first glance to give us much structure to study as compared to that found in the classical metric spaces, such as the Euclidean or hyperbolic. However it becomes potentially more intriguing when one observes that a discrete valued metric space can be compared to an interesting continuously valued metric space such as the hyperbolic plane [Gromov:1993]. This implies that if in a discrete space any pair of distinct points is joined by a geodesic segment (the shortest path), it makes such a metric space comparable to the classical metric spaces in the same way as a sequence of connected points can be similar to a line. The intuition is that if we look at a group 'from a distance', then the discrete geometry of the group (determined by discrete-value metric) looks *similar* to some continuous-valued approximations of it.

2.3 Cayley graphs as metric spaces

The intuition above can be realised through the introduction of a metric on Cayley graphs or graphs of groups.

Definition. *Definition (a Cayley graph). Let (G, S) be a finitely generated group. Then the Cayley graph $\Gamma(G, S)$ of a group G with respect to the choice of S is a directed coloured graph, where vertices are identified with the elements of G and the directed edges of a colour s connect all possible pairs of vertices (x, sx), $x \in G$, $s \in S$.*

Different choices of generators give different Cayley graphs. In the figure below the Cayley graphs for $(\mathbb{Z}, +)$ are generated by $\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}$:

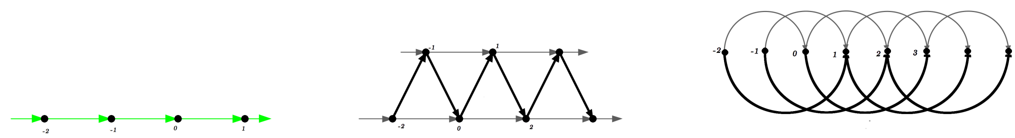


Fig 3: The Cayley graphs of the generated groups $(\mathbb{Z}, \{1\})$, $(\mathbb{Z}, \{1, 2\})$ and $(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$

Words in a generated group correspond to *paths* in its Cayley graph, where*a path* between two arbitrary vertices of the graph, x and y, is a sequence of edges between x and y.

If one takes each such edge to be of a length equal to 1, then the *length* of the path is equal to the number of unit edges in this path. Therefore, for any pair of vertices x, y of $\Gamma(G, S)$ the *path metric (word metric)* $d_{\Gamma,S}(x, y)$ on the Cayley graph $\Gamma(G, S)$ can be defined as the length of (one of) the shortest paths (*geodesic segments*) connecting x and y.

The set of vertices in a Cayley graph with this path metric is now a *metric space*, and the group metric space $((G, S), d_S)$ is *isometric* to the Cayley graph metric space $(\Gamma(G, S), d_{\Gamma,S})$ by definition.

By thinking of Cayley graphs as metric spaces one can discover interesting properties, which turn out to be *independent from the choice of generators* for a given Cayley graph. For this reason these properties are considered to be the properties of the groups themselves and called ‘geometric’ or ‘quasi-isometric invariants’ (see the next section). Studying these properties makes up a substantial part of geometric group theory.

2.4 Quasi-isometry

The intuition that groups resemble classical metric spaces has been made precise using the notion of quasi-isometry. It is based on *isometry*, which is a distance-preserving map between metric spaces. Isometry is similar to *congruence* in geometry, in that it expresses the idea ‘is the same as’ in a given category. To distinguish it further, quasi-isometry is a *weaker* equivalence relation between metric spaces: it is supposed to grasp the idea ‘is similar to’.

Definition. *Definition (a quasi-isometry). For metric spaces* (M_1, d_1) *and* (M_2, d_2) *a function* $f{:}M_1 \to M_2$ *(not necessarily continuous) is called a* quasi-isometry *if there exist constants* $A \geq 1$ *and* $B \geq 0$ *such that*

$$\frac{1}{A}d_1(x,y) - B \leq d_2(f(x), f(y)) \leq Ad_1(x,y) + B$$

for all $x, y \in M_1$ *and a constant* $C \geq 0$ *such that to every* u *in* M_2 *there exists* x *in* M_1 *with* $d_2(u, f(x)) \leq C$. *The spaces* M_1 *and* M_2 *are called quasi-isometric if there exists a quasi-isometry* $f{:}M_1 \to M_2$.

Example 1.

1. $f : (\mathbb{Z}, d) \to (\mathbb{R}, d)$ *is a quasi-isometry (*$f(x) = x$ *for any* $x \in \mathbb{Z}$*), where* d *is the usual Euclidean metric (see the figure below). Indeed,* $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x,y)$. *Take* $A = 1$ *and* $B = 0$.
2. $f : \mathbb{Z}^2 \to E^2$ *is a quasi-isometry with respect to Euclidean metric.*
3. *The Cayley graph of* $(\mathbb{Z}, \{1\})$ *as well as the Cayley graph of* $(\mathbb{Z}, \{1, 2\})$ *and* $(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ *with respect to word metric are quasi-isometric to* $(\mathbb{R}, d)$ *(see Figure 3).*

A more general proposition is that for a given group all its Cayley graphs are quasi-isometric. Also, two finitely generated groups are quasi-isometric, if and only if for some choices of generators, their Cayley graphs are quasi-isometric. The choice of generators is however unimportant because of the previous proposition.

2.5 Quasi-isometry invariants: hyperbolicity

Amongst many properties of finitely generated groups that are independent from the choice of generators is such an interesting one as *hyperbolicity*. The concept of hyperbolic groups was introduced by [Gromov:1987], which has since become very influential and given rise to an extensive research programme. Before this, hyperbolicity was considered only on surfaces and other differentiable manifolds with a metric. Gromov's innovation was to extrapolate it in a more general context, defining it also on discrete objects such as graphs or groups. The idea is again to embed a Cayley graph of a group *quasi-isometrically* into the hyperbolic space $\mathbb{H}^n$ and apply hyperbolic geometry to study this group (see also [Bridson:1999]). This involves the notion of a *geodesic triangle.*

Definition. *Definition (a geodesic triangle). A* geodesic triangle *is a figure consisting of three different points together with the pairwise-connecting geodesic segments.*

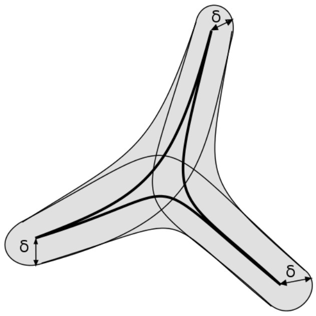


Fig 4: A thin hyperbolic triangle

The points are known as the vertices, while the geodesic segments are known as the sides of the triangle. A geodesic triangle can be considered in any space in which geodesics exist. For example, a geodesic triangle in a Cayley graph with the associated word metric consists of three distinct arbitrary vertices x, y, z connected by three geodesic segments (the sides of the triangle), from x to y, y to z and z to x respectively.

2.6 Thin (hyperbolic) triangles and negatively curved groups

The common definition of hyperbolicity is based on the key property of hyperbolic spaces that the sum of a triangle's angles is less than π. In a discrete case as in the case of a graph, there are no angles, yet there is the word metric. The following notion of *δ-thin triangles* allows us to define hyperbolicity for this metric in a more general way without appealing to the notion of angle.

Definition. *Definition (a δ-thin triangle). Let $\delta \geq 0$. A geodesic triangle in a metric space is said to be δ-thin if each of its sides is contained in the δ-neighbourhood of the union of the other two sides as in the Figure 4 (see Gromov:1987, p.120). Then, a geodesic space X is called δ-*hyperbolic *or* negatively curved *if every triangle in X is δ-thin.*

Now let us consider *δ-hyperbolicity* of Cayley graphs. Take any geodesic triangle in a Cayley graph, for example the triangle 1,2,3 in the Cayley graph of $(\mathbb{Z}, \{1\})$ in Figure 3. It is a δ-thin triangle, where $\delta = 0$. Indeed, each side is contained in the union of the other two sides: side 1,3 is the union of sides 1,2 and 2,3, and a similar formula applies to the other two sides.

A useful observation is that a triangle pinched in the sides is getting thinner and eventually collapses into a tripod (a connected graph with no circuits with at most three edges and at most one vertex of degree greater than one). Therefore a tripod is a 0-thin triangle, and those Cayley graphs which are composed of tripods or any other connected graph without cycles can be considered as hyperbolic spaces. It is also often said that Gromov-hyperbolic spaces are the ones that exhibit 'tree-like behavior'.

An important theorem first proven in 1981 by Gromov in his famous paper about the polynomial growth of groups:

Theorem 2. *Gromov's Theorem. Any group of polynomial growth contains a finite index nilpotent subgroup.*[2]

3 Discussion

Finally let me discuss what role the visual representations play in the geometric approach described above. To contrast to the geometric approach with the traditional combinatorial, the latter mostly uses symbolic notation. For example, the elements of the dihedral group of symmetries in an equilateral triangle D_3 can be written in symbols: I,r, r^2, f,fr,fr^2. Groups can be also represented by a multiplication table, and permutation groups are often written as multiplied matrices. Even if a group has a geometric model, like D_3 does, the algebra represents the concept that was articulated in a geometric way (symmetries of a geometric object) but now without geometrical allusions: merely in terms of some abstract rs and fs. We can think of group D_3 more abstractly as a set with group axioms, no longer thinking about group elements as continuous motion or as permutations. This is where *indifference* to the geometric aspects is especially effective. The combinatorial representations and axiomatic expression of groups are detached from the concrete nature of the group and can be applied in any scientific field.

Presented groups are the closest algebraic counterparts to Cayley graphs. Group presentation includes generators and group relations (words equal the identity or *empty words*). Here is the group presentation of D_3: $< r, f \mid r^3, f^2, rfrf >$. This type of combinatorial representation is quite informative and at the same time, synoptic. It is used in both the combinatorial and in the geometric approach. However, as demonstrated in the previous section, for a detailed consideration of group geometry Cayley graph diagrams are essential.

What makes them effective for example in the case of hyperbolic groups? Mathematically, the difference between symbolic notation of a generated

[2] Gromov [1981, 53-78]. For more results establishing important properties of hyperbolic groups see [Gromov 1987].

group and its Cayley graph is often said to be insignificant, but the cognitive difference between the two cognitive representations is crucial.

Indeed, what is mathematically significant here is the *response* to the *generating* aspect of the group (the generators). But cognitively a Cayley diagram gives more information: e.g. by colours, edges, shapes, the structure of the group at a glance, and importantly, connectedness. Groups do not have these properties. It is the diagram that suggests our *response* to these properties. One can say that Cayley diagrams basically help us to see groups as geometric shapes. This makes it possible to study groups by using the same methods as applied to the classical metric spaces. The main elements of this practice are (i) the *indifference* to the discrete structure of the group metric space, and (ii) the *response* to the perceptual similarity of particular Cayley graphs with these metric spaces. These are new responses, unavailable to the combinatorial approach. They in turn lead to new advances – the concepts of *quasi-isometry*, *hyperbolic groups* and other geometric properties of groups.

The *new* responses to the diagrams are applied from geometry, as for example in Euclidean geometry we respond to the intersections of lines, figures and their relations in the diagrams. The response is however *modified*: e.g. a geodesic triangle does not have to be shaped like a Euclidean triangle. In other words, some of the Euclidean diagrammatic appearance is *neglected*, whereas the more abstract properties of triangularity (three connected vertices) are *highlighted*.

To summarise, the examples above demonstrate that the geometric response to the diagrams of graphs makes it clear how we can naturally integrate geometric machinery into algebra (geodesics, triangles, metric spaces, hyperbolicity). As the case study demonstrates, it may be easier to think of the geometric and topological properties of an object such as a graph equipped with a diagram, than of one equipped with algebraic symbolism. As a result, a particular response to diagrammatic representations facilitates the ongoing application and developing of new concepts.

References

[Bridson, 1999] Bridson, M., Haeiger, A. (1999) *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 319, Springer-Verlag, Berlin.

[Brown, 1999] Brown, J. (1999) *Philosophy of Mathematics*: An

Introduction to the World of Proofs and Pictures, Routledge, London and New York.

[Giaquinto, 2007] Giaquinto, M. (2007) V*isual Thinking in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

[Gromov, 1987] Gromov, M. (1987) *Hyperbolic Groups*, Essays in Group Theory, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 8, Springer, New York.

[Gromov, 1993] Gromov, M. (1993) "Asymptotic Invariants of Infinite Groups", in *Geometric Group Theory*, 2 (Sussex, 1991), London Mathematical Society Lecture Note Series, 182, Cambridge University Press, Cambridge, 1-295.

[Klein, 1873] Klein, F. (1873) "*Ü*ber die Sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (Zweiter Aufsatz)", *Mathematische Annalen* (Springer Berlin / Heidelberg) 6, 11.

[Mancosu, 2005] Mancosu, P., Jorgensen, K. and Pedersen, S. (eds.) (2005) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematic*s, Springer.

[Manders, 1999] Manders, K. (1999) "Euclid or Descartes: Representation and Responsiveness", unpublished manuscript 6, 35.

[Starikova, 2010] Starikova, I. (2010) "Why Do Mathematicians Need Different Ways of Presenting Mathematical Objects? The Case of Cayley Graphs" *Topoi* 29 (1).

[Starikova, 2011] Starikova, I. (2011) "Philosophical Investigation of Geometrisation in Mathematics PhD Thesis, University of Bristol.

[Starikova, 2012] Starikova, I. (2012) "From Practice to New Concepts: Geometric Properties of Groups" *Philosophia Scientiæ*, 16 (1), 129–151.

ALGEBRAS OF DISTRIBUTIONS OF FORMULAS WITH RESPECT TO GENERALIZED SEMI-ISOLATION

S.V. Sudoplatov*

Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State Technical University,
20, K.Marx avenue, Novosibirsk, 630073, Russia;
Novosibirsk State University,
2, Pirogova street, Novosibirsk, 630090, Russia
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

We generalize the notion of semi-isolation for families of closed sets of types and develop a general approach for the description of binary links between realizations of 1-types in terms of labels of pairwise non-equivalent semi-isolating formulas [15, 16] to the generalized semi-isolation.

We use the standard relation algebraic, model-theoretical, semigroup, and graph-theoretic terminology [2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 18, 19] as well as some notions, notations, and constructions in [15, 16, 1].

1 Preliminary notions, notations, and properties

Definition 1.1. Let T be a complete theory, $\mathcal{M} \models T$. We consider *closed* nonempty sets (under the natural topology) sets $\mathbf{p}(x) \subseteq S^1(\varnothing)$, i. e., sets $\mathbf{p}(x)$ such that $\mathbf{p}(x) = \bigcap\limits_{i\in I}[\varphi_{\mathbf{p},i}(x)]$, where $[\varphi_{\mathbf{p},i}(x)] \rightleftharpoons \{p(x) \in S^1(\varnothing) \mid \varphi_{\mathbf{p},i}(x) \in p(x)\}$ for some formulas $\varphi_{\mathbf{p},i}(x)$ of T.

For closed sets $\mathbf{p}(x), \mathbf{q}(y) \subseteq S(\varnothing)$ of types, realized in $\mathcal{M}$, we take all $(\mathbf{p},\mathbf{q})$-*preserving* $(\mathbf{p},\mathbf{q})$-*semi-isolating*, $(\mathbf{p}\to\mathbf{q})$-, or $(\mathbf{q}\leftarrow\mathbf{p})$-*formulas* $\varphi(x,y)$ of T, i. e., formulas for which if $a\in M$ realizes a type in $\mathbf{p}(x)$ then every solution of $\varphi(a,y)$ realizes a type in $\mathbf{q}(y)$. Now, for each such a formula $\varphi(x,y)$, we define a binary relation $R_{\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q}} \rightleftharpoons \{(a,b) \mid \mathcal{M}\models \varphi(a,b)\wedge \mathbf{p}(a)\}$, where $\models \mathbf{p}(a)$ means that a realizes some type in $\mathbf{p}$. If $(a,b)\in R_{\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q}}$, (a,b) is called a $(\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q})$-*arc*.

*The work is supported by RFBR (grant 12-01-00460-a).

If, in addition, $\varphi(x,y)$ is a $(\mathbf{p}\leftrightarrow\mathbf{q})$-*formula*, i. e., it is both a $(\mathbf{p}\to\mathbf{q})$- and a $(\mathbf{q}\to\mathbf{p})$-formula then the set $[a,b]\rightleftharpoons\{(a,b),(b,a)\}$ is said to be a $(\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q})$-*edge*.

$(\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q})$-arcs and $(\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q})$-edges are called *arcs* and *edges* respectively if we say about fixed or some $(\mathbf{p}\to\mathbf{q})$-formula $\varphi(x,y)$. If (a,b) is a $(\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q})$-arc such that the pair (b,a) is not an arc for any $(\mathbf{q},\mathbf{p})$-formula, then (a,b) is called *irreversible*.

Note that if $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ are singletons, $\varphi(x,y)$ is a $(\mathbf{p},\mathbf{q})$-semi-isolating formula with $\models\varphi(a,b)$ for a and b, realizing $\cup\mathbf{p}$ and $\cup\mathbf{q}$ respectively, then $\varphi(x,y)$ witnesses that a semi-isolates b.

If $\mathbf{p}$ is a set and $\mathbf{q}$ is a singleton then $R_{\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q}}=\bigcup\limits_{p\in\mathbf{p}}R_{p,\varphi,\cup\mathbf{q}}$.

Below we shall consider nonempty closed sets $\mathbf{p}(x),\mathbf{q}(y)\subseteq S(\varnothing)$.

For $\mathbf{p}(x),\mathbf{q}(y)\subseteq S(\varnothing)$ we denote by $\mathrm{SI}_{\mathbf{p}\to\mathbf{q}}$ the set of all pairs (a,b) such that $\models\varphi(a,b)$ for some $(\mathbf{p}\to\mathbf{q})$-formula $\varphi(a,b)$ and a realizing a type in $\mathbf{p}$. We set $\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\rightleftharpoons\mathrm{SI}_{\mathbf{p}\to\mathbf{q}}\cup\mathrm{SI}_{\mathbf{q}\to\mathbf{p}}$.

By the definition $\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ consists of all arcs linking $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ by $(\mathbf{p},\mathbf{q})$- or $(\mathbf{q},\mathbf{p})$-semi-isolating formulas. For $(a,b)\in\mathrm{SI}_{\mathbf{p}\to\mathbf{q}}$ we say that (a,b) *witnesses* that $\mathbf{p}$ *semi-isolates* $\mathbf{q}$ and a *generally semi-isolates* b (with respect to $(\mathbf{p},\mathbf{q})$).

For sets $\mathbf{p}(x),\mathbf{q}(y)\in S(\varnothing)$, we denote by $\mathrm{SICF}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ the set of $(\mathbf{p}\to\mathbf{q})$-formulas $\varphi(x,y)$. Let $\mathrm{SICE}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ be the set of pairs of formulas $(\varphi(x,y),\psi(x,y))\in\mathrm{SICF}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ such that for any realization a of a type in $\mathbf{p}$ the sets of solutions for $\varphi(a,y)$ and $\psi(a,y)$ coincide. Clearly, $\mathrm{SICE}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ is an equivalence relation on the set $\mathrm{SICF}(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Notice that each $\mathrm{SICE}(\mathbf{p},\mathbf{q})$-class E corresponds to either a set of $(\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q})$-edges, or a set of irreversible $(\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q})$-arcs, or simultaneously a set of $(\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q})$-edges and of irreversible $(\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q})$-arcs linking realizations in $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ by any (some) formula φ in E. Thus the quotient $\mathrm{SICF}(\mathbf{p},\mathbf{q})/\mathrm{SICE}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ is represented as a disjoint union of sets $\mathrm{SICFE}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $\mathrm{SICFA}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, and $\mathrm{SICFM}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, where $\mathrm{SICFE}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ consists of $\mathrm{SICE}(\mathbf{p},\mathbf{q})$-classes corresponding to sets of edges, $\mathrm{SICFA}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ consists of $\mathrm{SICE}(\mathbf{p},\mathbf{q})$-classes corresponding to sets of irreversible arcs, and $\mathrm{SICFM}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ consists of $\mathrm{SICE}(\mathbf{p},\mathbf{q})$-classes corresponding to sets containing edges and irreversible arcs.

The sets $\mathrm{SICF}(\mathbf{p},\mathbf{p})$, $\mathrm{SICE}(\mathbf{p},\mathbf{p})$, $\mathrm{SICFE}(\mathbf{p},\mathbf{p})$, $\mathrm{SICFA}(\mathbf{p},\mathbf{p})$, and $\mathrm{SICFM}(\mathbf{p},\mathbf{p})$ are denoted by $\mathrm{SICF}(\mathbf{p})$, $\mathrm{SICE}(\mathbf{p})$, $\mathrm{SICFE}(\mathbf{p})$, $\mathrm{SICFA}(\mathbf{p})$, and $\mathrm{SICFM}(\mathbf{p})$ respectively.

Let T be a complete theory without finite models,

$$U=U^-\,\dot\cup\,\{\varnothing,0\}\,\dot\cup\,U^+\,\dot\cup\,U'$$

be an alphabet of cardinality $\geq |2^{S(T)}|$ and consisting of *negative elements* $u^- \in U^-$, *positive elements* $u^+ \in U^+$, *neutral elements* $u' \in U'$, the empty set $\varnothing$, and zero 0. As usual, we write $u < 0$ for any $u \in U^-$ and $u > 0$ for any $u \in U^+$. The set $U^- \cup \{\varnothing, 0\}$ is denoted by $U^{\leq 0}$ and $U^+ \cup \{\varnothing, 0\}$ is denoted by $U^{\geq 0}$. Elements of U are called *labels*.

Let $\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})$: $\mathrm{SICF}(\mathbf{p},\mathbf{q})/\mathrm{SICE}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to U$ be injective *labelling functions*, $\mathbf{p}(x), \mathbf{q}(y) \subseteq S(\varnothing)$, for which negative elements correspond to the classes in $\mathrm{SICFA}(\mathbf{p},\mathbf{q})/\mathrm{SICE}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, positive elements and 0 correspond to the classes in $\mathrm{SICFE}(\mathbf{p},\mathbf{q})/\mathrm{SICE}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ such that 0 is defined only for $\mathbf{p}\cap\mathbf{q} \neq \varnothing$ and is represented by the formula $(x \approx y)$, $\varnothing$ corresponds to inconsistent formulas, and neutral elements code the classes in $\mathrm{SICFM}(\mathbf{p},\mathbf{q})/\mathrm{SICE}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $\nu(\mathbf{p}) \rightleftharpoons \nu(\mathbf{p},\mathbf{p})$. For $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \neq (\mathbf{p}',\mathbf{q}')$ we additionally assume that $\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} \cap \rho_{\nu(\mathbf{p}',\mathbf{q}')} = \{\varnothing, 0\}$ if $\mathbf{p}\cap\mathbf{q} \neq \varnothing$ and $\mathbf{p}'\cap\mathbf{q}' \neq \varnothing$, and $\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} \cap \rho_{\nu(\mathbf{p}',\mathbf{q}')} = \{\varnothing\}$ otherwise. Labelling functions with the properties above as well families of these functions are said to be *regular*. Below we shall consider only regular labelling functions and their regular families.

The labels, corresponding to isolating formulas, are said to be *isolating* whereas each label in $\bigcup\limits_{\mathbf{p},\mathbf{q}\subseteq S^1(\varnothing)} \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ is *semi-isolating*. By the definition, each isolating label belongs to $U^- \dot\cup \{0\} \dot\cup U^+$, i. e., it is not neutral and it is not $\varnothing$.

We denote by $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(x,y)$ formulas in $\mathrm{SICF}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ with a label $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$. If the set $\mathbf{p}$ is fixed and $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ then the formula $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(x,y)$ is denoted by $\theta_u(x,y)$.

Note that if $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(x,y)$ and $\theta_{\mathbf{q},v,\mathbf{p}}(x,y)$ are formulas witnessing that for realizations a and b of types in $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ respectively the pairs (a,b) and (b,a) belong to $\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$, then the formula $\varphi(x,y) = \theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(x,y) \wedge \theta_{\mathbf{q},v,\mathbf{p}}(y,x)$ witnesses that $[a,b]$ is a $(\mathbf{p},\varphi,\mathbf{q})$-edge. If $\varphi(x,y)$ witnesses that edges $[a,b]$ are principal for a realizing types in $\mathbf{p}$ and for b realizing types in $\mathbf{q}$ then the label u is *invertible* and the label $v \in U^{\geq 0}$ corresponds uniquely to u, and vice versa. The labels u and v are *reciprocally inverse* and are denoted by v^{-1} and u^{-1} respectively. In general case, each label $u \in U^{\geq 0}$ has a (nonempty) set of *inverse* labels in $U^{\geq 0}$, denoted also by u^{-1}.

For sets $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{k+1} \subseteq S^1(\varnothing)$ and sets $X_1, X_2, \ldots, X_k \subseteq U$ of labels we denote by

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, X_1, \mathbf{p}_2, X_2, \ldots, \mathbf{p}_k, X_k, \mathbf{p}_{k+1})$$

the set of all labels $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_{k+1})}$ corresponding to formulas $\theta_{\mathbf{p}_1,u,\mathbf{p}_{k+1}}(x,y)$ satisfying, for realizations a in $\mathbf{p}_1$ and some $u_1 \in X_1 \cap \rho_{\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)}, \ldots, u_k \in X_k \cap \rho_{\nu(\mathbf{p}_k,\mathbf{p}_{k+1})}$, the following condition:

$$\theta_{\mathbf{p}_1,u,\mathbf{p}_{k+1}}(a,y) \vdash \theta_{\mathbf{p}_1,u_1,\mathbf{p}_2,u_2,\ldots,\mathbf{p}_k,u_k,\mathbf{p}_{k+1}}(a,y),$$

where

$$\theta_{\mathbf{p}_1,u_1,\mathbf{p}_2,u_2,\ldots,\mathbf{p}_k,u_k,\mathbf{p}_{k+1}}(x,y) \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons \exists x_2, x_3, \ldots x_{k-1}(\theta_{\mathbf{p}_1,u_1,\mathbf{p}_2}(x,x_2) \wedge \theta_{\mathbf{p}_2,u_2,\mathbf{p}_3}(x_2,x_3) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \theta_{\mathbf{p}_{k-1},u_{k-1},\mathbf{p}_k}(x_{k-1},x_k) \wedge \theta_{\mathbf{p}_k,u_k,\mathbf{p}_{k+1}}(x_k,y)).$$

In view of transitivity of semi-isolation, each formula

$$\theta_{\mathbf{p}_1,u_1,\mathbf{p}_2,u_2,\ldots,\mathbf{p}_k,u_k,\mathbf{p}_{k+1}}(x,y)$$

(possibly inconsistent) has a label in $\rho_{\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_{k+1})}$.

Thus the Boolean $\mathcal{P}(U)$ of U is the universe of an *algebra* $\mathfrak{A}$ *of distributions of binary formulas* (for generalized semi-isolation) with k-ary operations

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, \cdot, \mathbf{p}_2, \cdot, \ldots, \mathbf{p}_k, \cdot, \mathbf{p}_{k+1}),$$

where $\varnothing \neq \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{k+1} \subseteq S^1(\varnothing)$. This algebra has a natural restriction to any nonempty family $R \subseteq \mathcal{P}(S^1(\varnothing)) \setminus \{\varnothing\}$ as well as to the algebras of distributions of binary isolating and semi-isolating formulas [15, 16]. Besides, if U_0 is a subalphabet of U then the restriction of the universe of $\mathfrak{A}$ to the set $\mathcal{P}(U_0)$ and the restrictions for values of operations to the set U_0 forms, possibly partial, algebra $\mathfrak{A} \upharpoonright U_0$.

Note that if some set X_i is disjoint with $\rho_{\nu(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1})}$, in particular, if it is empty then

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, X_1, \mathbf{p}_2, X_2, \ldots, \mathbf{p}_k, X_k, \mathbf{p}_{k+1}) = \varnothing,$$

and if each X_i has common elements with $\rho_{\nu(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1})}$ then

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, X_1, \mathbf{p}_2, X_2, \ldots, \mathbf{p}_k, X_k, \mathbf{p}_{k+1}) \neq \varnothing.$$

Note also that if $X_i \not\subseteq \rho_{\nu(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1})}$ for some i then

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, X_1, \mathbf{p}_2, X_2, \ldots, \mathbf{p}_k, X_k, \mathbf{p}_{k+1}) =$$
$$= \mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, X_1 \cap \rho_{\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)}, \mathbf{p}_2, X_2 \cap \rho_{\nu(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)}, \ldots, \mathbf{p}_k, X_k \cap \rho_{\nu(\mathbf{p}_k,\mathbf{p}_{k+1})}, \mathbf{p}_{k+1}).$$

In view of the previous equation, below, considering values

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, X_1, \mathbf{p}_2, X_2, \ldots, \mathbf{p}_k, X_k, \mathbf{p}_{k+1}),$$

we shall assume that $X_i \subseteq \rho_{\nu(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1})}$, $i = 1, \ldots, k$.

If each set X_i is a singleton consisting of an element u_i then we use u_i instead of X_i in $\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, X_1, \mathbf{p}_2, X_2, \ldots, \mathbf{p}_k, X_k, \mathbf{p}_{k+1})$ and write

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2, u_2, \ldots, \mathbf{p}_k, u_k, \mathbf{p}_{k+1}).$$

By the definition the following equality holds:

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, X_1, \mathbf{p}_2, X_2, \dots, \mathbf{p}_k, X_k, \mathbf{p}_{k+1}) =$$

$$= \cup\{\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2, u_2, \dots, \mathbf{p}_k, u_k, \mathbf{p}_{k+1}) \mid u_1 \in X_1, \dots, u_k \in X_k\}.$$

Hence the specification of $\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, X_1, \mathbf{p}_2, X_2, \dots, \mathbf{p}_k, X_k, \mathbf{p}_{k+1})$ is reduced to the specifications of $\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2, u_2, \dots, \mathbf{p}_k, u_k, \mathbf{p}_{k+1})$. Note also that $\mathrm{SI}(\mathbf{p}, X, \mathbf{q}) = X$ for any $X \subseteq \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$.

Clearly, if $u_i = 0$ then $\mathbf{p}_i \subseteq \mathbf{p}_{i+1}$ for nonempty sets

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2, u_2, \dots, \mathbf{p}_i, 0, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_k, u_k, \mathbf{p}_{k+1})$$

and the following conditions hold:

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, 0, \mathbf{p}_1) = \{0\},$$

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2, u_2, \dots, \mathbf{p}_i, 0, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_k, u_k, \mathbf{p}_{k+1}) =$$
$$= \mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2, u_2, \dots, \mathbf{p}_i, u'_{i+1}, \mathbf{p}_{i+2}, \dots, \mathbf{p}_k, u_k, \mathbf{p}_{k+1}),$$

where u'_{i+1} is the label in $\rho_{\nu(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+2})}$ for the formula $\theta_{\mathbf{p}_{i+1},u_{i+1},\mathbf{p}_{i+2}}(x,y)$.

Obviously,

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2, u_2, \dots, \mathbf{p}_i, \varnothing, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_k, u_k, \mathbf{p}_{k+1}) = \{\varnothing\}.$$

If all sets $\mathbf{p}_i$ equal to a set $\mathbf{p}$ then we write $\mathrm{SI}_{\mathbf{p}}(X_1, X_2, \dots, X_k)$ and $\mathrm{SI}_{\mathbf{p}}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ as well as $\lceil X_1, X_2, \dots, X_k \rceil_{\mathbf{p}}$ and $\lceil u_1, u_2, \dots, u_k \rceil_{\mathbf{p}}$ instead of

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, X_1, \mathbf{p}_2, X_2, \dots, \mathbf{p}_k, X_k, \mathbf{p}_{k+1})$$

and

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2, u_2, \dots, \mathbf{p}_k, u_k, \mathbf{p}_{k+1})$$

respectively. We omit the index $\cdot_{\mathbf{p}}$ if the set $\mathbf{p}$ is fixed. In this case, we write $\theta_{u_1,u_2,\dots,u_k}(x,y)$ instead of $\theta_{\mathbf{p},u_1,\mathbf{p},u_2,\dots,\mathbf{p},u_k,\mathbf{p}}(x,y)$.

Proposition 1.2. (1) *If $\mathbf{p}, \mathbf{q} \subseteq S^1(T)$ consist of principal types then $(\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} \cup \rho_{\nu(\mathbf{q},\mathbf{p})}) \subseteq U^{\geq 0}$.*

(2) *If $\mathbf{p}, \mathbf{q} \subseteq S^1(T)$, $\mathbf{p}$ consists of principal types and $\mathbf{q}$ consists of non-principal types then $\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} = \{\varnothing\}$ and $\rho_{\nu(\mathbf{q},\mathbf{p})} \subseteq U^{-}$.*

Proof is obvious. □

Corollary 1.3. *If $\mathbf{p}(x)$ consists of principal types then $\rho_{\nu(\mathbf{p})} \subseteq U^{\geq 0}$.*

Proposition 1.4. *Let $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{k+1}$ be subsets of $S^1(\varnothing)$. The following assertions hold.*

(1) *If* $u_i\in\rho_{\nu(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1})}$, $i=1,\ldots,k$, *and some* u_i *is negative then*

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1,u_1,\mathbf{p}_2,u_2,\ldots,\mathbf{p}_k,u_k,\mathbf{p}_{k+1})\subseteq U^-.$$

(2) *If* $u_i\in\rho_{\nu(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1})}\cap U^{\geq 0}$, $i=1,\ldots,k$, *then*

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1,u_1,\mathbf{p}_2,u_2,\ldots,\mathbf{p}_k,u_k,\mathbf{p}_{k+1})\subseteq U^{\geq 0}.$$

(3) *If* $u_i\in\rho_{\nu(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1})}\cap(U^{\geq 0}\cup U')$, $i=1,\ldots,k$, *and some* u_i *belongs to* U' *then*

$$\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1,u_1,\mathbf{p}_2,u_2,\ldots,\mathbf{p}_k,u_k,\mathbf{p}_{k+1})\subseteq U'.$$

(4) *If* $u_i\in\rho_{\nu(\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1})}\cap U^{\geq 0}$, $i=1,\ldots,k$, *then all elements of the set* $X\rightleftharpoons\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1,u_1,\mathbf{p}_2,u_2,\ldots,\mathbf{p}_k,u_k,\mathbf{p}_{k+1})$ *are invertible and the set* $X^{-1}\rightleftharpoons\cup\{v^{-1}\mid v\in X\}$ *is contained in* $\mathrm{SI}(\mathbf{p}_{k+1},u_k^{-1},\mathbf{p}_k,u_{k-1}^{-1},\ldots,\mathbf{p}_2,u_1^{-1},\mathbf{p}_1)$.

Proof. (1)–(3) follow by the transitivity of semi-isolation.

(4) All elements in X are invertible by (2). Let v' be an element in $v^{-1}\subseteq X^{-1}$. Then for any $(\mathbf{p}_1,\theta_{\mathbf{p}_1,v,\mathbf{p}_{k+1}},\mathbf{p}_{k+1})$-edge $[a,b]$ such that $[b,a]$ is a $(\mathbf{p}_{k+1},\theta_{\mathbf{p}_{k+1},v',\mathbf{p}_1},\mathbf{p}_1)$-edge, there are realizations a_i of $\mathbf{p}_i$, $i=1,\ldots,k+1$, such that $a_0=a$, $a_{k+1}=b$, $\models\theta_{\mathbf{p}_i,u_i,\mathbf{p}_{i+1}}(a_i,a_{i+1})$, $i=1,\ldots,k$.

Since $[a_{i+1},a_i]$ is an u'_i-edge for some $u'_i\in u_i^{-1}$, $i=1,\ldots,k$, then

$$\theta_{\mathbf{p}_{k+1},v',\mathbf{p}_1}(b,x)\vdash\theta_{\mathbf{p}_{k+1},u'_k,\mathbf{p}_k,u'_{k_1}\ldots,\mathbf{p}_2,u'_1,\mathbf{p}_1}(b,x),$$

whence, $v'\in\mathrm{SI}(\mathbf{p}_{k+1},u_k^{-1},\mathbf{p}_k,u_{k-1}^{-1},\ldots,\mathbf{p}_2,u_1^{-1},\mathbf{p}_1)$. □

Note that the inclusion $X^{-1}\subseteq\mathrm{SI}(\mathbf{p}_{k+1},u_k^{-1},\mathbf{p}_k,u_{k-1}^{-1},\ldots,\mathbf{p}_2,u_1^{-1},\mathbf{p}_1)$ can be strict since labels in u_i^{-1} may compose new (with respect to X^{-1}) labels for $\mathrm{SI}(\mathbf{p}_{k+1},u_k^{-1},\mathbf{p}_k,u_{k-1}^{-1},\ldots,\mathbf{p}_2,u_1^{-1},\mathbf{p}_1)$.

Corollary 1.5. *Restrictions of* U *to the sets* $U^{\leq 0}$, $U^{\geq 0}$, *and* $U^{\geq 0}\cup U'$ *form subalgebras of the algebra of distributions of binary formulas. The operation of inversion is coordinated with the operations of the algebra.*

2 Preordered algebras of distributions of binary formulas

For the set U of labels in the algebra $\mathfrak{A}$ of binary formulas of theory T, we define the following relation $\trianglelefteq$: if $u,v\in U$ then $u\trianglelefteq v$ if and only if $u=v$, or $u\in\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ $v\in\rho_{\nu(\mathbf{p}',\mathbf{q}')}$ for some sets $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{p}',\mathbf{q}'\subseteq S^1(\varnothing)$, $\mathbf{p}\subseteq\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}\subseteq\mathbf{q}'$, and $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a,y)\vdash\theta_{\mathbf{p}',v,\mathbf{q}'}(a,y)$ for any realization a of $\mathbf{p}$. If $u\trianglelefteq v$ and $u\neq v$ we write $u\triangleleft v$.

By the definition the relation $\trianglelefteq$ is reflexive and transitive. It is antisymmetric since distinct labels correspond to non-equivalent formulas or to strict inclusions $\mathbf{p} \subset \mathbf{p}'$, $\mathbf{q} \subset \mathbf{q}'$.

Below we consider some properties for substructures of partially ordered set $\left\langle \bigcup\limits_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}; \trianglelefteq \right\rangle$.

Proposition 2.1. (1) *For any set $\mathbf{p} \subseteq S^1(\varnothing)$, the partially ordered set $\left\langle \bigcup\limits_{\mathbf{q}} \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}; \trianglelefteq \right\rangle$ forms a upper semilattice.*

(2) *An element $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} \setminus \{\varnothing\}$ is $\trianglelefteq$-minimal if and only if for a realization a of $\mathbf{p}$, the formula $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a, y)$ is isolating and* $\mathrm{tp}(a)$ *is the unique type in $\mathbf{p}$ such that for its realizations a', $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a', y)$ is consistent.*

(3) (monotony) *If $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ and $u \trianglelefteq v$ then $v \in U^\delta$, $\delta \in \{-, +\}$, implies $u \in U^\delta$, and if $u \in U'$ then $v \in U'$.*

Proof. (1) If $u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}_1)}$, $u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}_2)}$ then for the formulas $\theta_{\mathbf{p},u_1,\mathbf{q}_1}(x, y)$ and $\theta_{\mathbf{p},u_2,\mathbf{q}_2}(x, y)$ the label v for the formula $\theta_{\mathbf{p},u_1,\mathbf{q}_1}(x, y) \vee \theta_{\mathbf{p},u_2,\mathbf{q}_2}(x, y)$ is the supremum for the labels u_1 and u_2.

(2) If $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a, y)$ are isolating formulas and for a' realizing types in $\mathbf{p} \setminus \{\mathrm{tp}(a)\}$, $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a', y)$ are inconsistent then the label u is $\trianglelefteq$-minimal by the definition. If the formula $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a, y)$ is consistent and not isolating then there is a formula $\varphi(a, y)$ such that the semi-isolating formulas $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a, y) \wedge \varphi(a, y)$ and $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a, y) \wedge \neg\varphi(a, y)$ are consistent. For the labels v_1 and v_2 of these formulas, we have $v_1 \neq v_2$, $v_1 \lhd u$, and $v_2 \lhd u$. Similarly, if $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a, y)$ is isolating and there is a' realizing a type in $\mathbf{p} \setminus \{\mathrm{tp}(a)\}$ such that $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a', y)$ is consistent, then taking a formula $\psi(x) \in \mathrm{tp}(a) \setminus \mathrm{tp}(a')$ we get distinct labels v_1' and v_2' for $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(x, y) \wedge \psi(x)$ and $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(x, y) \wedge \neg\psi(x)$ respectively such that $v_1' \lhd u$, and $v_2' \lhd u$.

(3) If $v \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} \cap U^-$ then for any solution b of the formula $\theta_{\mathbf{p},v,\mathbf{q}}(a, y)$, where $\models \mathbf{p}(a)$, the pair (a, b) is an irreversible arc. Hence, for any solution b of $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a, y)$, where $u \trianglelefteq v$, the pair (a, b) is also an irreversible arc and so u belongs to U^-. Replacing arcs by edges, the same arguments show that $u \trianglelefteq v$ and $v \in U^+$ imply $u \in U^+$. If $u \in U'$ then the set of pairs (a, b) for the formula $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a, y)$ contains both irreversible and reversible arcs. This property is preserved for any label v with $u \trianglelefteq v$, whence $v \in U'$. □

The partial order $\trianglelefteq$ has a natural extension to a preorder on the set $\mathcal{P}(U)$: for any sets $X, Y \in \mathcal{P}(U)$ we put $X \trianglelefteq Y$ if $X = \varnothing$, or for any $x \in X$ there is $y \in Y$ with $x \trianglelefteq y$ and for any $y \in Y$ there is $x \in X$ with $x \trianglelefteq y$. Thus, the algebra $\mathfrak{A}$ is transformed to the preordered algebra $\langle \mathfrak{A}; \trianglelefteq \rangle$ with the monotonic property with respect to its restrictions to the sets $U^{\leq 0}$, $U^{\geq 0}$, and U'.

There is a natural equivalence relation $E_{\mathfrak{A}}$ on the set U of labels: two labels u_1 and u_2 are equivalent if $u_1 = u_2$ or for some $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \cap \mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1)}$, $u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_2)}$, and the formula $\theta_{\mathbf{p}_1,u_1,\mathbf{q}_1}(x,y)$ is equal to the formula $\theta_{\mathbf{p}_2,u_2,\mathbf{q}_2}(x,y)$.

The equivalence relation $E_{\mathfrak{A}}$ forms filters on sets of labels based on the following property: if $u_1 E_{\mathfrak{A}} u_2$, $u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1)}$, and $u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_2)}$ then there is a (unique) label $(u_1 \wedge u_2) \in E_{\mathfrak{A}}(u_1) \cap \rho_{\nu(\mathbf{p}_1\cap\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_1\cap\mathbf{q}_2)}$ and for any $\mathbf{q} \supseteq \mathbf{q_1}$, there is a (unique) label $u_{\mathbf{q}} \in E_{\mathfrak{A}}(u_1) \cap \rho_{\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{q})}$.

Another natural expansion of the now preordered algebra $\langle \mathfrak{A}; \trianglelefteq \rangle$ is based on the properties mentioned that if $u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}_1)}$, $u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}_2)}$, and $v \in \rho_{\nu(\mathbf{q}_1,\mathbf{r})}$ then the formulas $\theta_{\mathbf{p},u_1,\mathbf{q},v,\mathbf{r}}(x,y)$ and $\theta_{\mathbf{p},u_1,\mathbf{q}_1}(x,y) \vee \theta_{\mathbf{p},u_2,\mathbf{q}_2}(x,y)$ as well as $\theta_{\mathbf{p},u_1,\mathbf{q}_1}(x,y) \wedge \theta_{\mathbf{p},u_2,\mathbf{q}_2}(x,y)$ and $\theta_{\mathbf{p},u_1,\mathbf{q}_1}(x,y) \wedge \neg\theta_{\mathbf{p},u_2,\mathbf{q}_2}(x,y)$ (if the formulas $\theta_{\mathbf{p},u_1,\mathbf{q}_1}(a,y) \wedge \theta_{\mathbf{p},u_2,\mathbf{q}_2}(a,y)$ and $\theta_{\mathbf{p},u_1,\mathbf{q}_1}(a,y) \wedge \neg\theta_{\mathbf{p},u_2,\mathbf{q}_2}(a,y)$ are consistent for some a with $\models \mathbf{p}(a)$) have labels in U. We denote these labels by $u_1 \circ v$, $u_1 \vee u_2$, $u_1 \wedge u_2$, and $u_1 \wedge \neg u_2$ respectively. The last label is also denoted by $\neg u_2 \wedge u_1$.

Note that the operations $\wedge$ for the set $\mathbf{p}$ and with respect to $\mathbf{p}_1 \cap \mathbf{p}_2$ are coordinated by $E_{\mathfrak{A}}$.

The label $u_1 \circ v$ is the *composition* of labels u_1 and v; $u_1 \vee u_2$ is the *union* or the *disjunction* of labels u_1 and u_2; $u_1 \wedge u_2$ is their *intersection* or *conjunction*; $u_1 \wedge \neg u_2$ is the *relative complement* of u_2 in u_1.

Clearly, $u_1 \trianglelefteq u_1 \vee u_2$, $u_2 \trianglelefteq u_1 \vee u_2$, $u_1 \wedge u_2 \trianglelefteq u_1$, $u_1 \wedge u_2 \trianglelefteq u_2$, $u_1 \wedge \neg u_2 \trianglelefteq u_1$.

We set

$$(\mathbf{p}, (u_1 \circ v), \mathbf{r}) \rightleftharpoons \begin{cases} \{u_1 \circ v\}, & \text{if } u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} \text{ and } v \in \rho_{\nu(\mathbf{q},\mathbf{r})}, \\ \varnothing, & \text{if } u_1 \notin \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} \text{ or } v \notin \rho_{\nu(\mathbf{q},\mathbf{r})}, \end{cases}$$

$$(\mathbf{p}, (u_1 \vee u_2), \mathbf{q}_1 \cup \mathbf{q}_2) \rightleftharpoons \begin{cases} \{u_1 \vee u_2\}, & \text{if } u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}_1)} \text{ and } u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}_2)}, \\ \{u_1\}, & \text{if } u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}_1)} \text{ and } u_2 \notin \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} \\ & \text{for } \mathbf{q} \subseteq \mathbf{q}_1 \cup \mathbf{q}_2, \\ \{u_2\}, & \text{if } u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}_2)} \text{ and } u_2 \notin \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}, \\ & \text{for } \mathbf{q} \subseteq \mathbf{q}_1 \cup \mathbf{q}_2, \\ \varnothing, & \text{if } u_1 \notin \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} \text{ and } u_1 \notin \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} \\ & \text{for } \mathbf{q} \subseteq \mathbf{q}_1 \cup \mathbf{q}_2, \end{cases}$$

$$(\mathbf{p}, (u_1 \wedge u_2), \mathbf{q}) \rightleftharpoons \begin{cases} \{u_1 \wedge u_2\}, & \text{if } u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}, u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} \\ & \text{and } \models \exists y(\theta_{\mathbf{p},u_1,\mathbf{q}}(a,y) \wedge \theta_{\mathbf{p},u_2,\mathbf{q}}(a,y)) \\ & \text{for some } a \text{ with } \models \mathbf{p}(a), \\ \varnothing, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$(\mathbf{p},(u_1\wedge\neg u_2),\mathbf{q})\rightleftharpoons\begin{cases}\{u_1\wedge\neg u_2\}, & \text{if } u_1\in\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}, u_2\in\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}\\ & \text{and } \models\exists y(\theta_{\mathbf{p},u_1,\mathbf{q}}(a,y)\wedge\neg\theta_{\mathbf{p},u_2,\mathbf{q}}(a,y))\\ & \text{for some } a \text{ with } \models\mathbf{p}(a),\\ \varnothing, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$(\mathbf{p},(X_1\,\tau\,X_2),\mathbf{q})\rightleftharpoons\cup\{(\mathbf{p},(u_1\,\tau\,u_2),\mathbf{q})\mid u_1\in X_1,u_2\in X_2\},\ \tau\in\{\circ,\vee,\wedge\},$$

$$(\mathbf{p},(X_1\wedge\neg X_2),\mathbf{q})\rightleftharpoons(\mathbf{p},(\neg X_2\wedge X_1),\mathbf{q})\rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons\cup\{(\mathbf{p},(u_1\wedge\neg u_2),\mathbf{q})\mid u_1\in X_1,u_2\in X_2\},\ X_1,X_2\in\mathcal{P}(U).$$

Labels u_1 and u_2 are *consistent* if $u_1\wedge u_2\in U$. If $u_1\wedge u_2=\varnothing$ the labels u_1 and u_2 are called *inconsistent.*

The preordered algebra $\langle\mathfrak{A};\trianglelefteq\rangle$ equipped with the equivalence relation $E_{\mathfrak{A}}$ and binary operations $(\mathbf{p},(\cdot\,\tau\,\cdot),\mathbf{q})$, $\tau\in\{\vee,\wedge,\circ\}$, and $(\mathbf{p},(\cdot\wedge\neg\,\cdot),\mathbf{q})$, $\mathbf{p},\mathbf{q}\subseteq S^1(\varnothing)$, is called a *preordered algebra with relative set-theoretic operations and the composition* or briefly a POSTC-*algebra.*

For any sets $\mathbf{p},\mathbf{q}\subseteq S^1(\varnothing)$ the structure $\langle\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})};\vee,\wedge,\varnothing\rangle$ with operations $\vee$ and $\wedge$ on labels is an Ershov algebra, i. e., a *distributive lattice with zero* $\varnothing$ *and relative complements* [5] such that for any $u,v\in\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ if $u\trianglelefteq v$ and $u'=\neg u\wedge v$ is a label then $u\wedge u'=\varnothing$ and $u\vee u'=v$, and if the label u' does not exist then $u=v$.

A label $u\in U\setminus\{\varnothing\}$ is an *atom* or an *atomic label* if u is a $\trianglelefteq$-minimal element in $U\setminus\{\varnothing\}$, i. e., for any label $v\in U\setminus\{\varnothing\}$ if $v\trianglelefteq u$ then $v=u$.

By Proposition 2.1, the set of atoms equals the set of isolating labels and, thus, each atom $u\in\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ is represented by an isolated formula $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a,y)$, where $\models\mathbf{p}(a)$ and $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a',y)$ are inconsistent for a' realizing $\mathbf{p}\setminus\{\mathrm{tp}(a)\}$.

Let R be a nonempty family of sets of types in $S^1(\varnothing)$, $\mathfrak{A}_R$ be a restriction of POSTC-algebra $\mathfrak{A}$ to the family R. The structure $\mathfrak{A}_R$ is *atomic* if for any sets $\mathbf{p},\mathbf{q}\in R$ and for any label $u\in\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}\setminus\{\varnothing\}$, there is an atom $v\in\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ such that $v\trianglelefteq u$. The POSTC-algebra $\mathfrak{A}$ is called R-*atomic* if $\mathfrak{A}_R$ is atomic. If $R=\mathcal{P}(S^1(\varnothing))\setminus\{\varnothing\}$ then the R-atomic POSTC-algebra is called *atomic.*

Using the definition of atomic structure, of R-atomic POSTC-algebra, and of small theory we obtain the following assertions.

Proposition 2.2. *If R is a nonempty family of finite sets of types in $S^1(\varnothing)$ and for any type $p\in\cup R$, there is an atomic model $\mathcal{M}_p$ over a realization of p, then the* POSTC-*algebra $\mathfrak{A}$ is R-atomic.*

Corollary 2.3. *If T is a small theory with finitely many* 1-*types then the* POSTC-*algebra $\mathfrak{A}$ is atomic.*

3 Ranks and degrees of semi-isolation

Having the si-rank $\mathrm{si}(u)$ for labels $u \in \rho_{\nu(p,q)}$ as a local variation of Morley rank [13] we introduce two similar modifications for labels in $\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$.

Definition 3.1. For triples $(\mathbf{p}, u, \mathbf{q})$, where $\mathbf{p}, \mathbf{q} \subseteq S^1(\varnothing)$, $u \in U$, we define inductively the *rank* $\mathrm{si}_1(\mathbf{p}, u, \mathbf{q})$ *of semi-isolation*:

(1) $\mathrm{si}_1(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) = 0$ if $u \notin \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ or $u = \varnothing$;

(2) $\mathrm{si}_1(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \geq 1$ if $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} \setminus \{\varnothing\}$;

(3) for a positive ordinal α, $\mathrm{si}_1(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \geq \alpha+1$ if there is a set $\{v_i \mid i \in \omega\}$ of pairwise inconsistent labels such that $v_i \lhd u$ and $\mathrm{si}_1(\mathbf{p}, v_i, \mathbf{q}) \geq \alpha$, $i \in \omega$;

(4) for a limit ordinal α, $\mathrm{si}_1(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \geq \alpha$ if $\mathrm{si}_1(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \geq \beta$ for any $\beta \in \alpha$.

As usual, we write $\mathrm{si}_1(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) = \alpha$ if $\mathrm{si}_1(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \geq \alpha$ and $\mathrm{si}_1(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \not\geq \beta$ for $\alpha \in \beta$; $\mathrm{si}_1(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \rightleftharpoons \infty$ if $\mathrm{si}_1(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \geq \alpha$ for any ordinal α.

Now we define the *rank* $\mathrm{si}_2(\mathbf{p}, u, \mathbf{q})$.

For $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ and $p \in \mathbf{p}$, we denote by u_p the label $v \in \rho_{\nu(\{p\},\mathbf{q})}$ such that $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a, y) \equiv \theta_{\{p\},v,\mathbf{q}}(a, y)$ for a realizing p.

We set $\mathrm{si}_2(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \rightleftharpoons \sup\limits_{p\in\mathbf{p}} \mathrm{si}_1(\{p\}, u_p, \mathbf{q})$.

If sets $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ are fixed, we write $\mathrm{si}_j(u)$ instead of $\mathrm{si}_j(\mathbf{p}, u, \mathbf{q})$ and this value is said to be the *j-rank of semi-isolation* or the *si_j-rank* of the label u (with respect to the pair $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$), $j = 1, 2$. For a formula $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(x, y)$ we set $\mathrm{si}_j(\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(x, y)) \rightleftharpoons \mathrm{si}_j(u)$.

Clearly, if the theory is small then the si_j-ranks of each label are countable ordinals (having a label u with $\mathrm{si}_j(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) > \omega$, we get continuum many complete types $r(x, y) \supset p(x) \cup q(y)$ for some $p(x) \in \mathbf{p}$ and $q(y) \in \mathbf{q}$).

By the definition, $\mathrm{si}_2(u) \leq \mathrm{si}_1(u)$ for any label u. For singletons $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$, $\mathrm{si}_1(u) = \mathrm{si}_2(u)$ and this value equals to the si-rank of corresponding label.

Clearly the inequality $\mathrm{si}_2(u) \leq \mathrm{si}_1(u)$ can be strict since a formula $\varphi(x, y)$ can represent a label u for a sequence of types p_i, $i \in \omega$, such that $\varphi(x, y)$ is a $(p_i \to p_i)$-formula, $\mathrm{si}(u_{p_i}) = 1$ and for each i, there are v_i with $v_i \lhd u_{p_i}$. Thus we get $\mathrm{si}_2(u) = 1$ and $\mathrm{si}_1(u) = 2$.

We have the following inequality for any formula $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(x, y)$ and any realization a of $\mathbf{p}$ giving a low bound for the Morley rank of the formulas $\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a, y)$ by the si_2-rank:

$$\mathrm{si}_2(\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(x, y)) \leq \sup_{\models\mathbf{p}(a)} \mathrm{MR}(\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a, y)) + 1. \tag{1}$$

Similarly,

$$\mathrm{si}_1(\theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(x, y)) \leq \mathrm{MR}'\left(\bigvee_{\models\mathbf{p}(a)} \theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(a, y)\right) + 1, \tag{2}$$

where MR' means the Morley rank with respect to formulas $\bigvee\limits_{\models\mathbf{p}(a)}\theta_{\mathbf{p},u',\mathbf{q}}(a,y)$ for labels $u'\in\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$.

The inequalities (1) and (2) imply

Remark 3.2. (1) If a theory T has a finite Morley rank MR' then si_1-ranks of labels in $\bigcup\limits_{\mathbf{p},\mathbf{q}\subseteq S^1(T)}\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ are bounded by the value $\mathrm{MR}'(x\approx x)+1$.

(2) If a theory T has a finite Morley rank then si_2-ranks of labels in $\bigcup\limits_{\mathbf{p},\mathbf{q}\subseteq S^1(T)}\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ are bounded by the value $\mathrm{MR}(x\approx x)+1$.

We set $\mathrm{si}_j(\mathbf{p},\mathbf{q})\rightleftharpoons\sup\{\mathrm{si}_j(\mathbf{p},u,\mathbf{q})\mid u\in U\}$, $\mathrm{si}_j(\mathbf{p})\rightleftharpoons\mathrm{si}_j(\mathbf{p},\mathbf{p})$. For a nonempty family R of sets of 1-types, we put $\mathrm{si}_j(R)\rightleftharpoons\sup\{\mathrm{si}_j(\mathbf{p},\mathbf{q})\mid\mathbf{p},\mathbf{q}\subseteq R\}$. A family R is called si_j-*minimal* if $\mathrm{si}_j(R)=1$. The value $\mathrm{si}_j(\mathbf{p},\mathbf{q})$ is said to be the *j-rank of semi-isolation* or the si_j-*rank* of pair $(\mathbf{p},\mathbf{q})$, and $\mathrm{si}_j(R)$ is the *j-rank of semi-isolation* or the si_j-*rank* of the family R.

Since there are $|T|$ formulas of a theory T and the inequalities (1) and (2) hold we obtain

Proposition 3.3. (1) *Each si_1-rank in a theory T is either equal to ∞ or less than $\min\{|T|^+,(\mathrm{MR}'(x\approx x)+1)^+\}$. If the Morley rank $\mathrm{MR}'(x\approx x)$ is equal to an ordinal α then any si_1-rank in T is not more than $\alpha+1$.*

(2) *Each si_2-rank in a theory T is either equal to ∞ or less than*

$$\min\{|T|^+,(\mathrm{MR}(x\approx x)+1)^+\}.$$

If the Morley rank $\mathrm{MR}(x\approx x)$ is equal to an ordinal α then any si_2-rank in T is not more than $\alpha+1$.

The estimations for si_j-ranks in Proposition 3.3 can be far from exact. For instance, si_j-ranks in ω-categorical theories are finite while there are non-ω-stable ω-categorical theories.

Proposition 3.4. *For any sets $\mathbf{p},\mathbf{q}\subseteq S^1(\varnothing)$ the following assertions hold.*

(1) *If $u,v\in\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ and $u\trianglelefteq v$ then $\mathrm{si}_j(u)\leq\mathrm{si}_j(v)$.*

(2) *If $u,v\in\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ then $\mathrm{si}_j(u\vee v)=\max\{\mathrm{si}_j(u),\mathrm{si}_j(v)\}$ and $\mathrm{si}_j(u\wedge v)\leq\min\{\mathrm{si}_j(u),\mathrm{si}_j(v)\}$. The last inequality is transformed to the equality if and only if there is a label v' such that $v'\trianglelefteq u$, $v'\trianglelefteq v$, and $\mathrm{si}_j(v')=\mathrm{si}_j(u)$ or $\mathrm{si}_j(v')=\mathrm{si}_j(v)$.*

(3) *The equality $\mathrm{si}_j(\mathbf{p},\mathbf{q})=0$ holds if and only if there are no realizations of $\mathbf{p}$ witnessing that $\mathbf{p}$ semi-isolating $\mathbf{q}$.*

(4) *The equality $\mathrm{si}_j(\mathbf{p},\mathbf{q})=1$ holds if and only if there is a $(\mathbf{p}\to\mathbf{q})$-formula witnessing that a realization of $\mathbf{p}$ semi-isolates $\mathbf{q}$, and each such a $(\mathbf{p}\to\mathbf{q})$-formula $\varphi(x,y)$ is equivalent to a disjunction of formulas $\varphi_i(x,y)$*

such that each formula $\varphi_i(a,y)$ is either isolating or inconsistent, where $\models \mathbf{p}(a)$.

Proof is obvious. $\square$

Proposition 3.5. *For any nonempty family $R \subseteq S^1(\varnothing)$ the following assertions are satisfied.*

(1) $\mathrm{si}_j(R) \geq 1$.

(2) *The family R is si_j-minimal if and only if for any sets $\mathbf{p}, \mathbf{q} \subseteq R$ each $(\mathbf{p} \to \mathbf{q})$-formula $\varphi(x,y)$ is equivalent to a disjunction of formulas $\varphi_i(x,y)$ such that each formula $\varphi_i(a,y)$ is either isolating or inconsistent, where $\models \mathbf{p}(a)$.*

Proof. (1) is implied by the inequality $\mathrm{si}_j(\mathbf{p}) \geq 1$ for any nonempty $\mathbf{p} \subseteq S^1(\varnothing)$ since the formula $(a \approx y)$ witnesses that a semi-isolates itself, where $\models \mathbf{p}(a)$. (2) is an obvious corollary of (1) and Proposition 3.4, (4). $\square$

Remark 3.6. Since for a strongly minimal theory T the set of solutions for any formula $\varphi(a,y)$ is finite or cofinite, any $(\mathbf{p},\mathbf{p})$-semi-isolating formula $\psi(a,y)$ is represented as a finite disjunction of some isolating formulas $\psi_i(a,y)$ or as a negation of a finite disjunction of isolating formulas $\psi_i(a,y)$. If $\mathbf{p}$ is a finite set including a non-principal type then the representation of $\psi(a,y)$ is possible only as a finite disjunction of isolating formulas. It means that $\mathrm{si}_j(\mathbf{p}) = 1$. If $\mathbf{p}$ consists of principal types and there are finitely many pairwise non-equivalent isolating $(\mathbf{p} \to \mathbf{p})$-formulas $\psi(a,y)$ with $\models \mathbf{p}(a)$ then $\mathrm{si}_j(\mathbf{p}) = 1$, too. If there are infinitely many these pairwise non-equivalent isolating formulas $\psi(a,y)$ then $\mathrm{si}_j(\mathbf{p}) = 2$.

Definition 3.7. Let α be a positive ordinal, u_1 and u_2 be labels in $\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ such that $\mathrm{si}_j(u_1) = \mathrm{si}_j(u_2) = \alpha$. The labels u_1 and u_2 are *α_j-almost identic* or *$\sim_{\alpha,j}$-equivalent* (denoted by $u_1 \sim_{\alpha,j} u_2$) if $\mathrm{si}_j(u_1 \div u_2) < \alpha$, where $u_1 \div u_2 \rightleftharpoons (u_1 \wedge \neg u_2) \vee (\neg u_1 \wedge u_2)$.

Proposition 3.8. *The relation $\sim_{\alpha,j}$ is an equivalence relation for any set of labels in $\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ having the si_j-rank α.*

Proof. Clearly the relation $\sim_{\alpha,j}$ is reflexive and symmetric. For the checking of transitivity we assume that $u_1 \sim_{\alpha,j} u_2$ and $u_2 \sim_{\alpha,j} u_3$. Since $(u_1 \wedge \neg u_2 \wedge u_3) \trianglelefteq (u_1 \wedge \neg u_2) \trianglelefteq (u_1 \div u_2)$ we have

$$\mathrm{si}_j(u_1 \wedge \neg u_2 \wedge u_3) \leq \mathrm{si}_j(u_1 \div u_2) < \alpha.$$

As $u_1 \wedge u_3 = (u_1 \wedge u_2 \wedge u_3) \vee (u_1 \wedge \neg u_2 \wedge u_3)$ and $\mathrm{si}_j(u_1 \wedge \neg u_2 \wedge u_3) < \alpha$, for $u_1 \sim_{\alpha,j} u_3$, it is enough to prove that $\mathrm{si}_j(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3) = \alpha$. Suppose on contrary that $\mathrm{si}_j(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3) < \alpha$. Then $\mathrm{si}_j(u_1 \wedge u_2) = \alpha$ and

$$u_1 \wedge u_2 = (u_1 \wedge u_2 \wedge u_3) \vee (u_1 \wedge u_2 \wedge \neg u_3)$$

imply $\mathrm{si}_j(u_1 \wedge u_2 \wedge \neg u_3) = \alpha$. But $(u_1 \wedge u_2 \wedge \neg u_3) \trianglelefteq (u_2 \wedge \neg u_3) \trianglelefteq (u_2 \div u_3)$, and $\mathrm{si}_j(u_2 \div u_3) < \alpha$ gives $\mathrm{si}_j(u_1 \wedge u_2 \wedge \neg u_3) < \alpha$. The obtained contradiction means that $u_1 \sim_{\alpha,j} u_3$. □

By the definition, for any label $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ having the si_j-rank α, there is a greatest number $n \in \omega \setminus \{0\}$ of pairwise inconsistent (or, that equivalent, of pairwise non-$\sim_{\alpha,j}$-equivalent) labels $u_1, \ldots, u_n$ such that $u_i \trianglelefteq u$ and $\mathrm{si}_j(u_i) = \alpha$, $i = 1, \ldots, n$. This number n is called the *j-degree of semi-isolation* or the *si_j-degree* of label u and it is denoted by $\deg_j(p, u, q)$ or by $\deg_j(u)$. We have $\mathrm{si}_j(\varnothing) = 0$ and put $\deg_j(\varnothing) \rightleftharpoons 1$.

Proposition 3.9. (1) *If $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ and $\mathrm{si}_j(u) = \alpha$ then $\deg_j(u)$ is equal to the number of pairwise inconsistent labels $u_1, \ldots, u_n \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ having the si_j-rank α, the si_j-degree 1, and such that $u = u_1 \vee \ldots \vee u_n$.*

(2) *If $u, v \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$, $\mathrm{si}_j(u) = \mathrm{si}_j(v)$, and $u \trianglelefteq v$ then $\deg_j(u) \leq \deg_j(v)$.*

(3) *If $u, v \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ and $\mathrm{si}_j(u) = \mathrm{si}_j(v)$ then*

$$\deg_j(u \vee v) \leq \deg_j(u) + \deg_j(v).$$

The equality in this inequality holds if and only if $\mathrm{si}_j(u \wedge v) < \mathrm{si}_j(u)$. If $\mathrm{si}_j(u \wedge v) = \mathrm{si}_j(u)$ then

$$\deg_j(u \vee v) = \deg_j(u) + \deg_j(v) - \deg_j(u \wedge v).$$

(4) *If $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ is an atom, then $\mathrm{si}_j(u) = 1$ and $\deg_j(u) = 1$.*

(5) *If for a label $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$, $\mathrm{si}_j(u) = 1$ and $\deg_j(u) = 1$, then u is not neutral.*

(6). *If $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ and $\mathrm{si}_j(u) = 1$ then $\deg_j(u)$ is equal to the number of pairwise inconsistent atoms $u_1, \ldots, u_n \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ such that $u = u_1 \vee \ldots \vee u_n$.*

Proof is obvious. □

If there is a label $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ with $\mathrm{si}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathrm{si}_j(u)$ then the *j-degree of semi-isolation* or the *si_j-degree* $\deg_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ of pair $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ is

$$\sup\{\deg_j(u) \mid u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}, \mathrm{si}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathrm{si}_j(u)\},$$

$\deg_j(\mathbf{p}) \rightleftharpoons \deg_j(\mathbf{p}, \mathbf{p})$.

If for a nonempty family R of sets of 1-types there is a label $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in R$, with $\mathrm{si}_j(R) = \mathrm{si}_j(u)$ then the *j-degree of semi-isolation* or the *si_j-degree* $\deg_j(R)$ of R is

$$\sup\{\deg_j(u) \mid u \in \rho_{\nu(R)}, \mathrm{si}_j(R) = \mathrm{si}_j(u)\}.$$

Clearly, if $\deg_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ or $\deg_j(R)$ exist then these values are positive natural numbers or equal ω.

For an ordinal α, a natural number $n \geq 1$, and a set $X \in \{U, U \setminus \{\varnothing\}\}$ we put

$$X \upharpoonright (\alpha, n)_j \rightleftharpoons \{u \in X \mid \mathrm{si}_j(u) \leq \alpha \text{ and if } \mathrm{si}_j(u) = \alpha \text{ then } \deg_j(u) < n\},$$

$$X \upharpoonright (\alpha, \omega)_j \rightleftharpoons X \upharpoonright \alpha_j \rightleftharpoons \bigcup_{n \geq 1} X \upharpoonright (\alpha, n)_j.$$

Clearly, if $\alpha = \beta + 1$ then $X \upharpoonright (\alpha, 1)_j = X \upharpoonright \beta_j$, and if α is a limit ordinal then $X \upharpoonright (\alpha, 1)_j = \bigcup\limits_{\beta < \alpha} X \upharpoonright \beta_j$.

For ordinals α, β, $\beta \in (\omega + 1) \setminus \{0\}$, and for the algebra $\mathfrak{A}$ of distributions of binary semi-isolating formulas of theory T as well as for expansions and restrictions $\mathfrak{A}'$ of $\mathfrak{A}$, defined in previous sections, we denote by $\mathfrak{A} \upharpoonright (\alpha, \beta)_j$ and $\mathfrak{A}' \upharpoonright (\alpha, \beta)_j$ as well as by $\mathfrak{A}_{\alpha,\beta,j}$ and $\mathfrak{A}'_{\alpha,\beta,j}$ the restrictions of these algebras to the set $U \upharpoonright (\alpha, \beta)_j$. If $\beta = \omega$, these restrictions are denoted by $\mathfrak{A} \upharpoonright \alpha_j$, $\mathfrak{A}' \upharpoonright \alpha_j$, $\mathfrak{A}_{\alpha,j}$, and $\mathfrak{A}'_{\alpha,j}$. The restrictions are called the *$(\alpha, \beta)_j$-restrictions* and the *α_j-restrictions* respectively.

Since the si_j-rank of each label is positive, non-trivial restrictions (i. e., with nonempty sets of used labels) are only the restrictions of algebras with $\alpha > 0$. If $\mathrm{si}_j(\mathcal{P}(S^1(\varnothing))) = \alpha_0$ then, taking into consideration the inequality $\alpha > 0$, all essential (i. e., reflecting links of sets of labels of semi-isolating formulas with respect to their si_j-ranks) restrictions of these algebras are formed only for $0 < \alpha < \alpha_0$.

By Proposition 3.9, we obtain

Proposition 3.10. *The algebra of distributions of binary isolating formulas of theory T coincides with the algebra $\mathfrak{A} \upharpoonright (1, 2)_j$. The algebra $\mathfrak{A} \upharpoonright 1_j$ consists of labels being disjunctions of atoms.*

4 Monoid of distributions of binary formulas on a set of realizations of a family of type

Consider a complete theory T, a set $\mathbf{p}(x) \subseteq S(T)$, a regular labelling function $\nu(\mathbf{p})$: $\mathrm{PF}(\mathbf{p})/\mathrm{PE}(\mathbf{p}) \to U$, and a family of sets $\mathrm{SI}_{\mathbf{p}}(u_1, \ldots, u_k)$ of labels of binary $(\mathbf{p} \to \mathbf{p})$-formulas, $u_1, \ldots, u_k \in \rho_{\nu(\mathbf{p})}$, $k \in \omega$.

Below we show some basic properties for sets

$$\lceil u_1, \ldots, u_k \rceil \rightleftharpoons \mathrm{SI}_{\mathbf{p}}(u_1, \ldots, u_k).$$

Proposition 4.1. (Associativity). *For any $u_1, u_2, u_3 \in \rho_{\nu(\mathbf{p})}$, the following equalities hold:*

$$\lceil \lceil u_1, u_2 \rceil, u_3 \rceil = \lceil u_1, u_2, u_3 \rceil = \lceil u_1, \lceil u_2, u_3 \rceil \rceil.$$

Proof. For the proof of $\lceil\lceil u_1, u_2\rceil, u_3\rceil \subseteq \lceil u_1, u_2, u_3\rceil$, we take an arbitrary element $v \in \lceil\lceil u_1, u_2\rceil, u_3\rceil$. Then $v \in \lceil v', u_3\rceil$ for some $v' \in \lceil u_1, u_2\rceil$, and for any realization a of $\mathbf{p}$ we have

$$\theta_{v'}(a, x_2) \vdash \theta_{u_1,u_2}(a, x_2), \tag{3}$$

$$\theta_v(a, y) \vdash \theta_{v',u_3}(a, y). \tag{4}$$

By (3), we obtain

$$\theta_{v',u_3}(a, y) \vdash \theta_{u_1,u_2,u_3}(a, y). \tag{5}$$

Thus, (4) and (5) imply

$$\theta_v(a, y) \vdash \theta_{u_1,u_2,u_3}(a, y),$$

and, consequently, $v \in \lceil u_1, u_2, u_3\rceil$.

Now we prove the inclusion $\lceil u_1, \lceil u_2, u_3\rceil\rceil \subseteq \lceil u_1, u_2, u_3\rceil$. Take an arbitrary element $v \in \lceil u_1, \lceil u_2, u_3\rceil\rceil$. Then $v \in \lceil u_1, v'\rceil$ for some $v' \in \lceil u_2, u_3\rceil$, and for any realization a of $\mathbf{p}$ we have

$$\theta_{v'}(a, y) \vdash \theta_{u_2,u_3}(a, y), \tag{6}$$

$$\theta_v(a, y) \vdash \theta_{u_1,v'}(a, y). \tag{7}$$

By (7), we obtain

$$\theta_{u_1,v'}(a, y) \vdash \theta_{u_1,u_2,u_3}(a, y). \tag{8}$$

Thus, (7) and (8) imply

$$\theta_v(a, y) \vdash \theta_{u_1,u_2,u_3}(a, y),$$

and, consequently, $v \in \lceil u_1, u_2, u_3\rceil$.

The inclusions $\lceil\lceil u_1, u_2\rceil, u_3\rceil \supseteq \lceil u_1, u_2, u_3\rceil$ and $\lceil u_1, \lceil u_2, u_3\rceil\rceil \supseteq \lceil u_1, u_2, u_3\rceil$ are satisfied since, taking labels v_1 and v_2 for the formulas $\theta_{u_1,u_2}(x, y)$ and $\theta_{u_2,u_3}(x, y)$, we obtain, for $\models \mathbf{p}(a)$, that the formulas $\theta_{v_1,u_3}(a, y)$, $\theta_{u_1,u_2,u_3}(a, y)$, and $\theta_{u_1,v_2}(a, y)$ are pairwise equivalent, i. e.,

$$\lceil v_1, u_3\rceil = \lceil u_1, u_2, u_3\rceil = \lceil u_1, v_2\rceil.$$

□

In view of associativity, using the induction on number of brackets, we prove that all operations $\lceil\cdot, \cdot, \dots, \cdot\rceil$ acting on sets in $\mathcal{P}(\rho_{\nu(p)})$ are generated by the binary operation $\lceil\cdot, \cdot\rceil$ on the set $\mathcal{P}(\rho_{\nu(p)})$ and the values $\lceil X_1, X_2, \dots, X_k\rceil$,

$X_1, X_2, \ldots, X_k \subseteq \rho_{\nu(p)}$, do not depend on the sequence of adding of brackets for

$$X_{i,i+1,\ldots,i+m+n} \rightleftharpoons \lceil X_{i,i+1,\ldots,i+m}, X_{i+m+1,i+m+2,\ldots,i+m+n}\rceil,$$

where $X_{1,2,\ldots,k} = \lceil X_1, X_2, \ldots, X_k\rceil$.

Thus the structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})} \rightleftharpoons \langle \mathcal{P}(\rho_{\nu(\mathbf{p})}); \lceil\cdot,\cdot\rceil\rangle$ is a semigroup admitting the representation of all operations $\lceil\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\rceil$ by terms of the language $\lceil\cdot,\cdot\rceil$. Below the operation $\lceil\cdot,\cdot\rceil$ will be denoted also by $\cdot$ and we shall use the record uv instead of $u\cdot v$.

Since by the choice of the label 0 for the formula $(x \approx y)$ the equalities $X\cdot\{0\} = X$ and $\{0\}\cdot X = X$ are true for any $X \subseteq \rho_{\nu(\mathbf{p})}$, the semigroup $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ has the unit $\{0\}$, and it is a monoid. We have

$$Y \cdot Z = \bigcup\{yz \mid y \in Y, z \in Z\}$$

for any sets $Y, Z \in \mathcal{P}(\rho_{\nu(\mathbf{p})})$ in this structure.

Thus the following proposition holds.

Proposition 4.2. *For any complete theory T, any set $\mathbf{p} \subseteq S^1(T)$, and the regular labelling function $\nu(\mathbf{p})$, any operation $\mathrm{SI}_{\mathbf{p}}(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ on the set $\mathcal{P}(\rho_{\nu(\mathbf{p})})$ interpretable by a term of the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$.*

The monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is called the *monoid of binary semi-isolating formulas over the labelling function* $\nu(\mathbf{p})$ or the $\mathrm{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$*-monoid*.

By Propositions 1.4 and 4.1, we obtain

Proposition 4.3. *For any complete theory T, any set $\mathbf{p} \subseteq S^1(T)$, and the regular labelling function $\nu(\mathbf{p})$, the restriction $\mathfrak{SI}^{\leq 0}_{\nu(\mathbf{p})}$ (respectively $\mathfrak{SI}^{\geq 0}_{\nu(\mathbf{p})}$, $\mathfrak{SI}^{\geq 0,\mathrm{neu}}_{\nu(\mathbf{p})}$) of the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ to the set $U^{\leq 0}$ ($U^{\geq 0}$, $U^{\geq 0}\cup U'$) is a submonoid of $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$.*

By Proposition 3.10, the $(1,2)_j$-restriction of the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is isomorphic to the $I_{\nu(\mathbf{p})}$-structure $\mathfrak{P}_{\nu(\mathbf{p})}$. Besides, the $(1,2)_j$-restrictions of monoids $\mathfrak{SI}^{\leq 0}_{\nu(\mathbf{p})}$ and $\mathfrak{SI}^{\geq 0}_{\nu(\mathbf{p})}$ are isomorphic to structures $\mathfrak{P}^{\leq 0}_{\nu(\mathbf{p})}$ $\mathfrak{P}^{\geq 0}_{\nu(\mathbf{p})}$ respectively, being restrictions of $\mathfrak{P}_{\nu(\mathbf{p})}$ to sets of labels of corresponding signs.

5 α-deterministic and almost α-deterministic $\mathrm{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$-monoids

In the following definition, we generalize the notions of deterministic and almost deterministic structure $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ proposed in [15] as well as of α-deterministic and almost α-deterministic $\mathrm{SI}_{\nu(p)}$-monoids defined in [16].

Definition 5.1. Let U_0 be a subalphabet of the alphabet U, α be a positive ordinal, and $n \geq 1$ be a natural number. We put

$$\rho_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,n,j} \rightleftharpoons \{u \in \rho_{\nu(\mathbf{p})} \mid \mathrm{si}_j(u) \leq \alpha, \deg_j(u) < n \text{ for } \mathrm{si}_j(u) = \alpha\},$$

$$\rho_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j} \rightleftharpoons \bigcup_{n\in\omega} \rho_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j,n}.$$

The partial subalgebra $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})} \upharpoonright U_0$ of the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is called $(\alpha, n)_j$-*deterministic* if for any labels $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,n,j} \cap U_0$, the set $\lceil u_1, u_2 \rceil \cap U_0$ consists of labels having the si_j-ranks $\leq \alpha$ and contains less than n pairwise non-$\sim_{\alpha,j}$-equivalent labels of si_j-rank α.

The partial subalgebra $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})} \upharpoonright U_0$ of the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is called α_j-*deterministic* if $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})} \upharpoonright U_0$ is $(\alpha, 2)_j$-deterministic.

The partial subalgebra $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})} \upharpoonright U_0$ of the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is called *almost* α_j-*deterministic* or $(\alpha, \omega)_j$-*deterministic* if for any labels $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j} \cap U_0$, the set $\lceil u_1, u_2 \rceil \cap U_0$ consists of labels having the si_j-ranks $\leq \alpha$ and contains finitely many pairwise non-$\sim_{\alpha,j}$-equivalent labels of si_j-rank α.

By the definition, each $(\alpha, \omega)_j$-deterministic structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})} \upharpoonright U_0$ is a union of its $(\alpha, n)_j$-deterministic substructures, $n \geq 1$. So each α_j-deterministic structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})} \upharpoonright U_0$ is almost α_j-deterministic.

If $U_0 = U$ we shall not point out restrictions to the set U_0 for considered structures.

Below we show some basic properties of (almost) α_j-deterministic partial algebras $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})} \upharpoonright U_0$.

Proposition 5.2. (Monotony) *If a structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})} \upharpoonright U_0$ is (almost) α_j-deterministic and β is a positive ordinal then the structure $(\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})} \upharpoonright U_0) \upharpoonright \beta_j$ is also (almost) α_j-deterministic.*

Proof is obvious. □

Proposition 5.3. *For any monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ and ordinals α, β, where $\alpha, \beta > 0$, $\beta \in \omega + 1$, the following conditions are equivalent:*

(1) *the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is $(\alpha, \beta)_j$-deterministic;*

(2) $\mathrm{si}_j(u_1 \circ u_2) \leq \alpha$ *for any labels $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j,\beta}$ and if* $\mathrm{si}_j(u_1 \circ u_2) = \alpha$ *then* $\deg_j(u_1 \circ u_2) < \beta$.

Proof. The implication (1) $\Rightarrow$ (2) is obvious.

(2) $\Rightarrow$ (1). Consider arbitrary labels $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,\beta,j}$. Since, by hypothesis, $\mathrm{si}_j(u_1 \circ u_2) \leq \alpha$ and $v \trianglelefteq (u_1 \circ u_2)$ for any label $v \in \lceil u_1, u_2 \rceil$, $\lceil u_1, u_2 \rceil$ consists of labels of si_j-ranks $\leq \alpha$, and if $\mathrm{si}_j(v) = \mathrm{si}_j(u_1 \circ u_2) = \alpha$ then $\deg_j(v) \leq \deg_j(u_1 \circ u_2) < \beta$. Thus, the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is $(\alpha, \beta)_j$-deterministic. □

Proposition 5.3 immediately implies

Corollary 5.4. *For any monoid* $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ *and a positive ordinal* α *the following conditions are equivalent:*

(1) *the monoid* $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ *is almost* α_j*-deterministic;*

(2) $\mathrm{si}_j(u_1 \circ u_2) \leq \alpha$ *for any labels* $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j}$.

Corollary 5.5. *If* $\mathrm{si}_j(\mathbf{p})$ *is an ordinal then the monoid* $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ *is almost* $(\mathrm{si}_j(\mathbf{p}))_j$*-deterministic.*

Proposition 5.6. *If a monoid* $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ *is* $(\alpha,\beta)_j$*-deterministic then the structure* $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j} \rightleftharpoons \mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})} \upharpoonright \alpha_j$ *is also an* $(\alpha,\beta)_j$*-deterministic monoid.*

Proof. Since for any α_j-restriction the associativity, the presence of unit $\{0\}$, and the $(\alpha,\beta)_j$-determinacy is preserved, it is enough to note that for any labels u_1 and u_2 in $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,\beta,j}$ there is a label v in $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,\beta,j}$ belonging $\lceil u_1, u_2\rceil$. We can take $u_1 \circ u_2$ for v since, by hypothesis, $\mathrm{si}_j(u_1 \circ u_2) \leq \alpha$ and if $\mathrm{si}_j(u_1 \circ u_2) = \alpha$ then $\deg_j(u_1 \circ u_2) < \beta$. □

Proposition 5.7. *If* $\mathrm{si}_j(\mathbf{p})$ *is an ordinal then the monoid* $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ *is* $(\mathrm{si}_j(\mathbf{p}))_j$*-deterministic if and only if the value* $\deg_j(\mathbf{p})$ *is not defined or equals* 1.

Proof. If $\deg_j(\mathbf{p})$ is not defined the ordinal $\alpha = \mathrm{si}_j(\mathbf{p})$ is limit and can not be achieved by labels in $\rho_{\nu(\mathbf{p})}$. In particular, for any $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p})}$ the set $\lceil u_1, u_2\rceil$ does not contain labels of si_j-rank α. If $\deg_j(\mathbf{p}) \geq 2$ then there are non-$\sim_{\alpha,j}$-equivalent labels $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p})}$ of si_j-rank α. Then $\lceil u_1 \vee u_2, 0\rceil$ contains the labels u_1 and u_2, whence the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is not α_j-deterministic. If $\deg_j(\mathbf{p}) = 1$ then there is unique, up to $\sim_{\alpha,j}$-equivalence, label in $\rho_{\nu(\mathbf{p})}$ having the si_j-rank α. Since such a label is unique, the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is α_j-deterministic. □

Proposition 5.8. *The structure* $\mathfrak{P}_{\nu(\mathbf{p})}$ *is* (*almost*) *deterministic if and only if the structure* $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p}),1,2,j}$ *is* (*almost*) 1_j*-deterministic.*

Proof follows by the isomorphism between $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p}),1,2,j}$ and $\mathfrak{P}_{\nu(\mathbf{p})}$. □

Proposition 5.9. *Let* $\mathbf{p}(x)$ *be a set of complete* 1*-types of a theory* T, $\nu(\mathbf{p})$ *be a regular labelling function, and* $\mathrm{si}_j(\mathbf{p}) < \omega$. *The following conditions are equivalent:*

(1) *the monoid* $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ *is* $(1,n)_j$*-deterministic for some* $n \in \omega$*;*

(2) *the set* $\rho_{\nu(\mathbf{p})}$ *is finite;*

(3) *the set* $\rho_{\nu(\mathbf{p}),1,j}$ *finite;*

(4) *the set* $\rho_{\nu(\mathbf{p}),1,2,j}$ (*consisting of all atoms* $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p})}$) *is finite.*

Proof. If $\mathrm{si}_j(\mathbf{p}) > 1$ then, by $\mathrm{si}_j(\mathbf{p}) < \omega$, the set $\rho_{\nu(\mathbf{p}),1,j}$ is infinite and so the set $\rho_{\nu(\mathbf{p})}$ is also infinite. Since each label in $\rho_{\nu(\mathbf{p}),1,j}$ is a disjunction of labels in $\rho_{\nu(\mathbf{p}),1,2,j}$ and for any labels $u_1, \ldots, u_n \in \rho_{\nu(\mathbf{p}),1,j}$ the label $u_1 \vee \ldots \vee u_n$

belongs also to $\rho_{\nu(\mathbf{p}),1,j}$, the set $\rho_{\nu(\mathbf{p}),1,2,j}$ is infinite and the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is not $(1,n)_j$-deterministic for $n \in \omega$. Thus, none of the conditions (1)–(4) is not satisfied.

If $\mathrm{si}_j(\mathbf{p}) = 1$ then each label in $\rho_{\nu(\mathbf{p})}$ has the si_j-rank 1 and is represented as a disjunction of labels in $\rho_{\nu(\mathbf{p}),1,2,j}$. Thus, the conditions (2)–(4) are equivalent. If the set $\rho_{\nu(\mathbf{p}),1,2,j}$ contains $m \in \omega$ labels then there are $2^m - 1$ labels forming the set $\rho_{\nu(\mathbf{p})}$. Hence, the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is $(1, 2^m - 1)_j$-deterministic. If the set $\rho_{\nu(\mathbf{p}),1,2,j}$ is infinite then, for pairwise distinct labels $u_1, \ldots, u_m \in \rho_{\nu(\mathbf{p}),1,2,j}$, the set $\lceil u_1 \vee \ldots u_m, 0\rceil$ contains $2^m - 1$ labels and, since m is not bounded, the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is not $(1,n)_j$-deterministic for any n. Thus, the condition (1) is equivalent to each of the conditions (2)–(4). □

Definition 5.10. Let $\mathbf{p}(x)$ be a set of types in $S^1(T)$. A type $q(x_1, \ldots, x_n) \in S(T)$ is called a *$(n, \mathbf{p})$-type* if $q(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i)$ for some $p_i \in \mathbf{p}$. The set of all $(n, \mathbf{p})$-types of T is denoted by $S_{n,\mathbf{p}}(T)$ and elements of the set $S_{\mathbf{p}}(T) \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} S_{n,\mathbf{p}}(T)$ are called *$\mathbf{p}$-types*.

A type $q(\bar{y})$ in $S_{\mathbf{p}}(T)$ is called *$\mathbf{p}$-principal* if there is a formula $\varphi(\bar{y}) \in q(\bar{y})$ such that for some $p_i \in \mathbf{p}$, the set $\cup\{p_i(y_i) \mid y_i \in \bar{y}\} \cup \{\varphi(\bar{y})\}$ is included in $q(\bar{y})$ and forces $q(\bar{y})$.

Lemma 5.11 [1]. *For any finite set $\mathbf{p}$ of types in $S^1(T)$ and a natural number $n \geq 1$ the following conditions are equivalent:*

(1) *the set of $(n, \mathbf{p})$-types with a tuple $(x_1, \ldots, x_n)$ of free variables is infinite;*

(2) *there is a non-$\mathbf{p}$-principal $(n, \mathbf{p})$-type.*

Proposition 5.9 and Lemma 5.11 imply

Corollary 5.12. *If $\mathbf{p}(x)$ is a finite set of complete 1-types of a theory T, $\nu(\mathbf{p})$ is a regular labelling function, and all $(2, \mathbf{p})$-types are $\mathbf{p}$-principal, then the monoid $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ is $(1,n)_j$-deterministic for some $n \in \omega$.*

For a set $p(x)$ of 1-types and a positive ordinal α, we denote by $\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j}$ (in a model $\mathcal{M}$ of T) the relation of $(\mathbf{p}, \mathbf{p})$-semi-isolation restricted to the set of formulas of si_j-rank $\leq \alpha$:

$$\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j} \rightleftharpoons \{(a,b) \mid \mathcal{M} \models \mathbf{p}(a) \wedge \mathbf{p}(b) \text{ and } a \ (\mathbf{p},\mathbf{p})\text{-semi-isolates } b$$

$$\text{by a formula } \theta_u(x,y) \text{ with } \mathrm{si}_j\text{-rank } \leq \alpha\}.$$

Clearly, $I_{\mathbf{p}} = \mathrm{SI}_{\mathbf{p},1,j}$ for any set $\mathbf{p} \subseteq S^1(\varnothing)$. Observing this equality and an isomorphism between $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p}),1,2,j}$ and $\mathfrak{P}_{\nu(\mathbf{p})}$ the following proposition generalizes Proposition 4.3 in [15] Proposition 5.15 in [16].

Proposition 5.13. *Let $\mathbf{p}(x)$ be a set of complete types of a theory T, $\nu(\mathbf{p})$ be a regular labelling function, and α be a positive ordinal. For $j=2$ the following conditions are equivalent:*

(1) *the relation $\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j}$ (on a set of realizations of p in any model $\mathcal{M}\models T$) is transitive;*

(2) *the structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j}$ is an almost α_j-deterministic monoid.*

Proof. Let a, b, and c be realizations of $\mathbf{p}$ such that $(a,b)\in\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j}$ and $(b,c)\in\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j}$ by $(\mathbf{p}\to\mathbf{p})$-formulas $\theta_{u_1}(a,y)$ and $\theta_{u_2}(b,y)$ respectively. If the structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j}$ is an almost α_j-deterministic monoid then $\mathrm{si}_j(u_1\circ u_2)\leq\alpha$ and the pair (a,c) belongs to $\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j}$ by the $(\mathbf{p}\to\mathbf{p})$-formula $\theta_{u_1,u_2}(x,y)$. Since elements a, b, and c are arbitrary we have (2) $\Rightarrow$ (1).

Assume now that for some $u_1,u_2\in\rho_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j}$ the set $\mathrm{SI}_{\mathbf{p}}(u_1,u_2)$ contains a label u such that $\mathrm{si}_j(u)>\alpha$. Then by compactness the set

$$q(a,y)\rightleftharpoons\{\theta_{u_1,u_2}(a,y)\}\cup\{\neg\theta_v(a,y)\mid v\in\mathrm{SI}_{\mathbf{p}}(u_1,u_2),\mathrm{si}_j(v)\leq\alpha\}$$

is consistent for some a with $\models\mathbf{p}(a)$. Consider realizations b and c of $\mathbf{p}$ such that $\models\theta_{u_1}(a,b)\wedge\theta_{u_2}(b,c)$ and $\models q(a,c)$. We have $(a,b)\in\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j}$ and $(b,c)\in\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j}$ but $(a,c)\notin\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j}$ by the construction of q. Thus, the relation $\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j}$ is not transitive and the implication (1) $\Rightarrow$ (2) holds. $\square$

Note that Proposition 5.13 holds for $j=1$ with finite sets $\mathbf{p}$. Note also that for any ordinal $\alpha>0$, there are no $(\mathbf{p},\theta_u,\mathbf{p})$-edges, linking distinct realizations of $\mathbf{p}$ and satisfying the conditions $u>0$, $\mathrm{si}_j(u)\leq\alpha$, and $\mathrm{si}_j(u^{-1})\leq\alpha$, if and only if the relation $\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j}$ is antisymmetric. Since $\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha}$ is reflexive, the definition of $\nu(\mathbf{p})$ and Propositions 1.4, 5.13 imply

Corollary 5.14. *Let $\mathbf{p}(x)$ be a set of complete 1-types of a theory T, $\nu(\mathbf{p})$ be a regular labelling function, and α be a positive ordinal. For $j=1$ with a finite set $\mathbf{p}$ and for $j=2$, the following conditions are equivalent:*

(1) *the relation $\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j}$ is a partial order on a set of realizations of $\mathbf{p}$ in any model $\mathcal{M}\models T$;*

(2) *the structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p}),\alpha}$ is an almost α_j-deterministic monoid and $\rho_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j}\subseteq U^{\leq 0}$.*

This partial order $\mathrm{SI}_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j}$ is identical if and only if $\rho_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j}=\{\varnothing,0\}$.

Propositions 1.4 and 5.13 also imply

Corollary 5.15. *Let $\mathbf{p}(x)$ be a complete type of a theory T, $\nu(\mathbf{p})$ be a regular labelling function, and α be a positive ordinal. For $j=1$ with a finite set $\mathbf{p}$ and for $j=2$, the following conditions are equivalent:*

(1) *the relation $\mathrm{SI}_{\mathbf{p},\alpha,j}$ is an equivalence relation on the set of realizations of $\mathbf{p}$ in any model $\mathcal{M}\models T$;*

(2) *the structure* $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p}),\alpha,j}$ *is an almost* α_j*-deterministic monoid and consists of labels in* $U^{\geq 0}$.

Definition 5.16. An element $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p})}$ is called (*almost*) *deterministic* if for any realization a of $\mathbf{p}$ the formula $\theta_u(a, y)$ has unique solution (has at least one and finitely many solutions).

Since each semi-isolating formula $\theta_u(a, y)$ with finitely many solutions is equivalent to a disjunction of isolating formulas $\theta_{u_i}(a, y)$, then for $j = 1$ with a finite set $\mathbf{p}$ and for $j = 2$, each almost deterministic element has the si_j-rank 1 and so belongs to the set of labels in the structure $\mathfrak{SI}_{\nu(p),1,|\beta+1|,j}$, where β is the supremum of numbers of solutions for $\theta_u(a, y)$. In particular, each deterministic element belongs to the set of labels in the structure $\mathfrak{SI}_{\nu(p),1,2,j}$.

Clearly if elements u and v are (almost) deterministic then each element v' in $u \cdot v$ is also (almost) deterministic. Hence, the si_j-rank 1 is preserved for compositions $u \circ v$ of (almost) deterministic elements u and v. Moreover, the si_j-degree 1 is preserved for compositions of deterministic elements.

In Figure 1, the fragments of Hasse diagram are presented illustrating the links of the structure $\mathfrak{SI} \rightleftharpoons \mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ with structures above, being restrictions of $\mathfrak{SI}$ to subalphabets of U. Here the superscripts $\cdot^{\leq 0}$ and $\cdot^{\geq 0}$ point out on restrictions of $\mathfrak{SI}$ to the sets $U^{\leq 0}$ and $U^{\geq 0}$ respectively, and the subscripts to the upper estimates for si_j-ranks and si_j-degrees of labels. In Figure 1, a, a hierarchy of structures $\mathfrak{SI}_{\alpha,j}$, $\alpha \leq \mathrm{si}_j(\mathbf{p})$, $j = 1, 2$, is depicted starting with the trivial substructure; in Figure 1, b, links between substructures of $\mathfrak{SI}_{\nu(p),1,j}$ are presented; in Figure 1, c, links between substructures of $\mathfrak{SI}_{\alpha+1,j}$ for $1 \leq \alpha < \mathrm{si}_j(p)$ are shown. For a limit ordinal $\beta \leq \mathrm{si}_j(p)$, the Hasse diagram for substructures of $\mathfrak{SI}_{\beta,j}$ is obtained by union of presented diagrams for $\alpha < \beta$. If an ordinal $\beta \leq \mathrm{si}_j(p)$ is not limit, the Hasse diagram corresponds to the union of presented diagrams for $\alpha < \beta$ with the removal of structures $\mathfrak{SI}^{\leq 0}_{\beta+1,2,j}$ and $\mathfrak{SI}^{\geq 0}_{\beta+1,2,j}$.

6 POSTC-monoids

In this Section, we shall consider both the monoids $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{p})}$ and their expansions by operations and relations of POSTC-algebras containing these monoids. These expansions

$$\mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{p})} \rightleftharpoons \langle \mathcal{P}(\rho_{\nu(\mathbf{p})});\ \cdot, \trianglelefteq, \vee, \wedge, (\cdot\ \wedge\ \neg\, \cdot), \circ \rangle$$

are called *preordered monoids with relative set-theoretic operations and compositions* over regular labelling functions $\nu(\mathbf{p})$, or briefly $\mathrm{POSTC}_{\nu(\mathbf{p})}$*-monoids*.

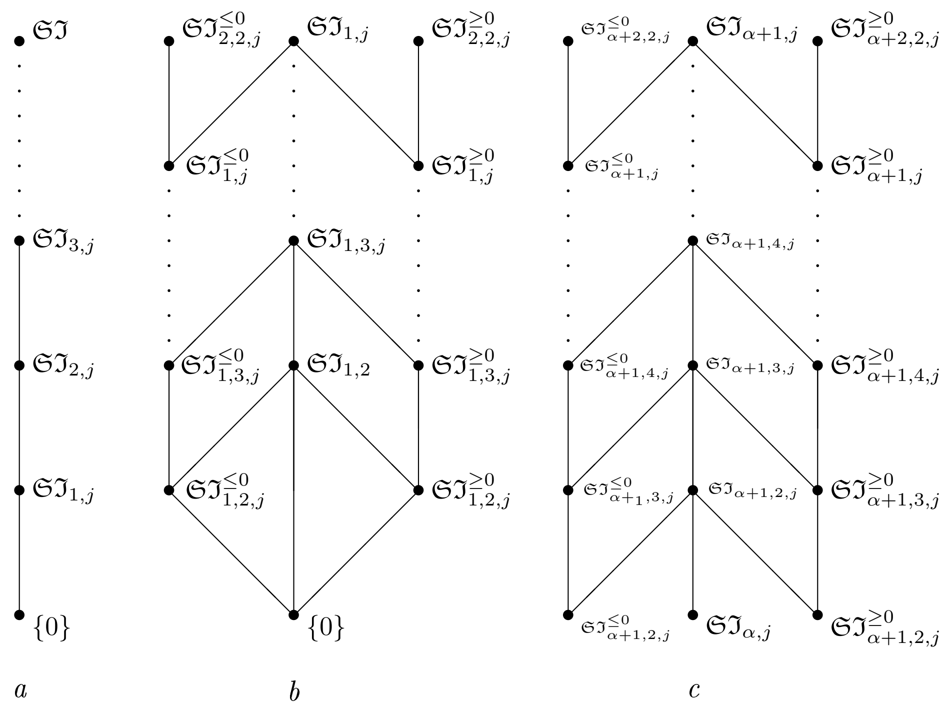


Fig. 1

We collect basic structural properties of $\mathrm{POSTC}_{\nu(\mathbf{p})}$-monoids and show that any expanded monoid $\mathfrak{S}\mathfrak{I}$, satisfying the following list of properties, coincides with some $\mathrm{POSTC}_{\nu(\mathbf{p})}$-monoid $\mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{p})}$.

Let $U = U^- \dot\cup \{\varnothing, 0\} \dot\cup U^+ \dot\cup U'$ be an alphabet consisting of a set U^- of *negative elements*, a set U^+ of *positive elements*, a set U' of *neutral elements*, and zero 0. As above, we write $u < 0$ for any element $u \in U^-$, $u > 0$ for any element $u \in U^+$, and $u \cdot v$ instead of $\{u\} \cdot \{v\}$ considering an operation $\cdot$ on the set $\mathcal{P}(U)$; $U^{\leq 0} \rightleftharpoons U^- \cup \{0\}$, $U^{\geq 0} \rightleftharpoons U^+ \cup \{0\}$.

A structure $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{P}(U); \cdot, \trianglelefteq, \vee, \wedge, (\cdot \wedge \neg \cdot), \circ \rangle$ is called a POSTC-*monoid* if it satisfies the following conditions:

• the operation $\cdot$ of the monoid $\langle \mathcal{P}(U) \setminus \{\varnothing\}; \cdot \rangle$ with the unit $\{0\}$ is generated by the function $\cdot$ on elements in U such that each elements $u, v \in U$ define a nonempty set $(u \cdot v) \subseteq U$: for any sets $X, Y \in \mathcal{P}(U) \setminus \{\varnothing\}$ the following equality holds:

$$X \cdot Y = \bigcup \{u \cdot v \mid u \in X, v \in Y\};$$

if $X \in \mathcal{P}(U)$ then $X \cdot \varnothing = \varnothing \cdot X = \varnothing$;

• the relation $\trianglelefteq$ on the set $\mathcal{P}(U)$ is a preorder with the least element $\varnothing$; this preorder is induced by the partial order $\trianglelefteq'$ on the set U of labels (forming a upper semilattice) by the following rule: if $X, Y \in \mathcal{P}(U)$ then $X \trianglelefteq Y$ if and only if $X = \varnothing$, or for any label $u \in X$ there is a label $v \in Y$ with $u \trianglelefteq' v$ and for any label $v \in Y$ there is a label $u \in X$ with $u \trianglelefteq' v$;

• a label $u \in U \setminus \{\varnothing\}$ is called an *atom* if $v \trianglelefteq u$ implies $v = u$ for any label $v \in U \setminus \{\varnothing\}$; only labels in $U^- \dot\cup \{0\} \dot\cup U^+$ may be atoms; the label 0 is an atom; some labels in $U^{\geq 0}$ lay under each label in U', moreover, if only labels $v \in U^{\geq 0}$ lay under a label $u \in U'$ then there are no greatest labels among labels v; only labels in U' lay over each label in U';

• the operations $\vee, \wedge, (\cdot \wedge \neg \cdot)$ on the set U form a distributive lattice with relative complements, moreover, for any elements $u, v \in U$,

$$u \trianglelefteq' v \Leftrightarrow u \wedge v = u \Leftrightarrow u \vee v = v,$$

$$(u \wedge \neg v) = \varnothing \Leftrightarrow u \trianglelefteq v;$$

• the operation $\circ$ is defined on the set U such that for any labels $u, v \in U$ the label $u \circ v$ is the greatest element of the set $u \cdot v$;

• the operations $\vee, \wedge, \circ$ on the set $\mathcal{P}(U)$ are induced by the corresponding operations on the set U: if $X, Y \in \mathcal{P}(U)$ and $\tau \in \{\vee, \wedge, \circ\}$ then $X \,\tau\, Y = \{u \,\tau\, v \mid u \in X, v \in Y\}$; the operation $(\cdot \wedge \neg \cdot)$ on the set $\mathcal{P}(U)$ is also induced by the corresponding operation on the set U: if $X, Y \in \mathcal{P}(U)$ then $X \wedge \neg Y = \{u \wedge \neg v \mid u \in X, v \in Y\}$;

• the sets U^- and $U^{\geq 0}$ are closed with respect to the operations $\vee, \wedge, (\cdot \wedge \neg \cdot)$; the set U' is closed under the operation $\vee$; if $u \in U'$ and $v \in U$ then $(u \vee v) \in U'$;

• repeating the definition in Section 2, for each label $u \in U$, the *ranks of semi-isolation* $\mathrm{si}_j(u) \geq 1$ and the *degrees of semi-isolation* $\deg_j(u)$ of label u is defined inductively, $\mathrm{si}_j(\varnothing) = 0$, $\deg_j(\varnothing) = 1$, as well as equivalence relations $\sim_\alpha, j$, restrictions $X_{\alpha,j}$, $X_{\alpha,\beta,j}$ of sets $X \in \{U, U \setminus \{\varnothing\}\}$ and restrictions $\mathfrak{M}'_{\alpha,j}$, $\mathfrak{M}'_{\alpha,\beta,j}$ for restrictions $\mathfrak{M}'$ of $\mathfrak{M}$ to sets of labels of si_j-ranks $\leq \alpha$, and for labels of si_j-rank α to sets of labels of si_j-degree $< \beta$;

• the restriction $\langle \mathcal{P}(U) \setminus \{\varnothing\}; \cdot \rangle_{1,2,j}$ of the monoid $\langle \mathcal{P}(U) \setminus \{\varnothing\}; \cdot \rangle$ is a I-groupoid;

• if $u < 0$ then sets $u \cdot v$ and $v \cdot u$ consist of negative elements for any $v \in U$;

• if $u > 0$ and $v > 0$ then $(u \cdot v) \subseteq U^{\geq 0}$;

• if $u, v \in U^{\geq 0} \cup U'$, and $u \in U'$ or $v \in U'$, then $(u \cdot v) \subseteq U'$;

• for any element $u > 0$ there is a nonempty set u^{-1} of *inverse* elements $u' > 0$ such that $0 \in (u \cdot u') \cap (u' \cdot u)$; in this case if $u \trianglelefteq' v$ and $v \in U^+$ then $u^{-1} \subseteq v^{-1}$;

• if a positive element u belongs to a set $v_1 \cdot v_2$, where $v_1 \circ v_2 \in U^+$, then $u^{-1} \subseteq v_2^{-1} \cdot v_1^{-1}$.

By the definition each POSTC-monoid $\mathfrak{M}$ contains POSTC-submonoids $\mathfrak{M}^{\leq 0}$ and $\mathfrak{M}^{\geq 0}$ with the universes $\mathcal{P}(U^- \cup \{\varnothing, 0\})$ and $\mathcal{P}(U^+ \cup \{\varnothing, 0\})$ respectively, being also POSTC-monoids (with $U^+ \cup U' = \varnothing$ and $U^- \cup U' = \varnothing$ respectively).

A POSTC-monoid $\mathfrak{M}$ is called *atomic* if for any label $u \in U \setminus \{\varnothing\}$ there is an atom $v \in U$ such that $v \trianglelefteq u$.

Note that POSTC-monoids with ordinals $\sup\{\mathrm{si}_j(u) \mid u \in U\}$ are atomic. Note also that restricting the notion of POSTC-monoid removing si_1-ranks we get the notion of POSTC$_1$-monoid that coincides with the notion of POSTC-monoid in [16]. Thus applying the proof of [16, Theorem 6.1], where a type is replaced by a set of types, we obtain

Theorem 6.1. *For any* (*at most countable and having an ordinal* $\sup\{\mathrm{si}_1(u) \mid u \in U\}$)) POSTC$_1$*-monoid* $\mathfrak{M}$ *there is a* (*small*) *theory* T *with a set of types* $\mathbf{p}(x) \subseteq S^1(T)$ *and a regular labelling function* $\nu(\mathbf{p})$ *such that* $\mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{p})} = \mathfrak{M}$. *If* si_1 *coincides with a* si*-rank then the set* $\mathbf{p}$ *can be chosen to be a singleton.*

Extending the construction for the rank si_2 we get

Theorem 6.2. *For any* (*at most countable and having ordinals* $\sup\{\mathrm{si}_j(u) \mid u \in U\}$)) POSTC*-monoid* $\mathfrak{M}$ *there is a* (*small*) *theory* T *with a set of types* $\mathbf{p}(x) \subseteq S^1(T)$ *and a regular labelling function* $\nu(\mathbf{p})$ *such that* $\mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{p})} = \mathfrak{M}$.

7 POSTC-monoid on a set of realizations for a family of sets of 1-types of a complete theory

In this section, the results above for a structure on a set of types, as well as results in [15, 16] for isolating and semi-isolating formulas, are generalized for a structure on a set of realizations for a family of sets of types.

Let $\mathbf{R}$ be a nonempty family of types in $S^1(T)$. We denote by $\nu(\mathbf{R})$ a regular family of labelling functions

$$\nu(\mathbf{p}, \mathbf{q})\colon \mathrm{SICF}(\mathbf{p}, \mathbf{q})/\mathrm{SICE}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to U, \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R},$$

$$\rho_{\nu(\mathbf{R})} \rightleftharpoons \bigcup_{\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{R}} \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}.$$

As in Proposition 4.1, the partial (for $|\mathbf{R}| > 1$) function SI on the set $\mathbf{R}\times\mathcal{P}(U)\times\mathbf{R}$, which maps each tuple of triples $(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2), \ldots, (\mathbf{p}_k, u_k, \mathbf{p}_{k+1})$, where $u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)}, \ldots, u_k \in \rho_{\nu(\mathbf{p}_k,\mathbf{p}_{k+1})}$, to the set of triples $(\mathbf{p}_1, v, \mathbf{p}_{k+1})$, where $v \in \mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2, u_2, \ldots, \mathbf{p}_k, u_k, \mathbf{p}_{k+1})$, is associative:

$$\begin{gathered}\mathrm{SI}(\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2, u_2, \mathbf{p}_3), u_3, \mathbf{p}_4) = \mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2, u_2, \mathbf{p}_3, u_3, \mathbf{p}_4) = \\ = \mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathrm{SI}(\mathbf{p}_2, u_2, \mathbf{p}_3, u_3, \mathbf{p}_4))\end{gathered} \tag{9}$$

for $u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)}$, $u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)}$, $u_3 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4)}$.

Consider the structure

$$\mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{R})} \rightleftharpoons \langle \mathbf{R}\times\mathcal{P}(U)\times\mathbf{R}; \cdot, \trianglelefteq, \vee, \wedge, (\cdot\ \wedge\ \neg\,\cdot), \circ\rangle$$

with the partial operations $\cdot$ and $\circ$ such that

$$(\mathbf{p}_1, X_1, \mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{p}_2, X_2, \mathbf{p}_3) = \bigcup\{(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{p}_2, u_2, \mathbf{p}_3) \mid u_1 \in X_1, u_2 \in X_2\},$$

$$(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{p}_2, u_2, \mathbf{p}_3) = \{(\mathbf{p}_1, v, \mathbf{p}_3) \mid v \in \mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2, u_2, \mathbf{p}_3)\},$$

$$(\mathbf{p}_1, X_1, \mathbf{p}_2)\circ(\mathbf{p}_2, X_2, \mathbf{p}_3) = \bigcup\{(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2)\circ(\mathbf{p}_2, u_2, \mathbf{p}_3) \mid u_1 \in X_1, u_2 \in X_2\},$$

$$(\mathbf{p}_1, u_1, \mathbf{p}_2)\circ(\mathbf{p}_2, u_2, \mathbf{p}_3) = \{(\mathbf{p}_1, u\circ v, \mathbf{p}_3)\},$$

$$u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)}, u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)},$$

as well as the relation $\trianglelefteq$ of preorder, being induced by the partial order, of the same name, on the set of labels and the partial operations $\vee, \wedge, (\cdot\ \wedge\ \neg\,\cdot)$ such that

$$(\mathbf{p}, X, \mathbf{q})\vee(\mathbf{p}, Y, \mathbf{q}) = \bigcup\{(\mathbf{p}, u, \mathbf{q})\vee(\mathbf{p}, v, \mathbf{q}) \mid u \in X, v \in Y\},$$

$$(\mathbf{p}, u, \mathbf{q})\vee(\mathbf{p}, v, \mathbf{q}) = \{(\mathbf{p}, u\vee v, \mathbf{q})\},$$

$$(\mathbf{p}, X, \mathbf{q})\wedge(\mathbf{p}, Y, \mathbf{q}) = \bigcup\{(bfp, u, \mathbf{q})\wedge(\mathbf{p}, v, \mathbf{q}) \mid u \in X, v \in Y\},$$

$$(\mathbf{p}, u, \mathbf{q})\wedge(\mathbf{p}, v, \mathbf{q}) = \{(\mathbf{p}, u\wedge v, \mathbf{q})\},$$

$$(\mathbf{p}, X, \mathbf{q})\wedge\neg(\mathbf{p}, Y, \mathbf{q}) = \bigcup\{(\mathbf{p}, u, \mathbf{q})\wedge\neg(\mathbf{p}, v, \mathbf{q}) \mid u \in X, v \in Y\},$$

$$(\mathbf{p}, u, \mathbf{q})\wedge\neg(\mathbf{p}, v, \mathbf{q}) = \{(\mathbf{p}, u\wedge\neg v, \mathbf{q})\},$$

$$u, v \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}.$$

The POSTC-monoids $\mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{p})}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{R}$, are naturally embeddable into this structure. The structure $\mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{R})}$ is called a *join of* POSTC-*monoids* $\mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{p})}$,

$\mathbf{p} \in \mathbf{R}$, relative to the family $\nu(\mathbf{R})$ of labelling functions and it is denoted by $\bigoplus\limits_{\mathbf{p}\in\mathbf{R}} \mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{p})}$. If $\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})} = \varnothing$ for all $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ the join $\bigoplus\limits_{\mathbf{p}\in\mathbf{R}} \mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{p})}$ is *free*, it is represented as the disjoint union of POSTC-monoids $\mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{p})}$ and denoted by $\bigsqcup\limits_{\mathbf{p}\in\mathbf{R}} \mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{p})}$.

By (9) we have

Proposition 7.1. *For any complete theory T, for any nonempty family $\mathbf{R} \subseteq \mathcal{P}(S^1(T))$, and for any regular family $\nu(\mathbf{R})$ of labelling functions, each n-ary partial operation* $\mathrm{SI}(\mathbf{p}_1, \cdot, \mathbf{p}_2, \cdot, \mathbf{p}_3 \ldots, \mathbf{p}_n, \cdot, \mathbf{p}_{n+1})$ *on the set $\mathcal{P}(U)$ is interpretable by a term of the structure $\bigoplus\limits_{\mathbf{p}\in\mathbf{R}} \mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{p})}$ with fixed sets $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n+1} \in \mathbf{R}$.*

Denote by $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(\mathbf{R})}$ the restriction of $\mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{R})}$ to the partial operation $\cdot$.

Using Proposition 1.4 we obtain the following analogue of Proposition 4.3.

Proposition 7.2. *For any complete theory T, for any nonempty family $\mathbf{R} \subset \mathcal{S}(\mathcal{T})$ of sets of 1-types, and for any regular family $\nu(\mathbf{R})$ of labelling functions, the restriction of the structure $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(\mathbf{R})}$ to the set $U^{\leq 0}$ (respectively $U^{\geq 0}$, $U^{\geq 0} \cup U'$) is closed under the partial operation $\cdot$.*

By Proposition 7.2, the structure $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(\mathbf{R})}$ has substructures $\mathfrak{S}\mathfrak{I}^{\leq 0}_{\nu(\mathbf{R})}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{I}^{\geq 0}_{\nu(\mathbf{R})}$ and $\mathfrak{S}\mathfrak{I}^{\geq 0,\mathrm{neu}}_{\nu(\mathbf{R})}$, generated by triples $(\mathbf{p}, u, \mathbf{q})$ with $u \leq 0$, $u \geq 0$, and $u \in U^{\geq 0} \cup U'$ respectively, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}$. Here, for any triple $(\mathbf{p}, u, \mathbf{q})$ in $\mathfrak{S}\mathfrak{I}^{\geq 0}_{\nu(\mathbf{R})}$ the triple $(\mathbf{q}, u^{-1}, \mathbf{p})$ is also attributed to $\mathfrak{S}\mathfrak{I}^{\geq 0}_{\nu(\mathbf{R})}$.

Replacing for the definition in Section 5 the function $\nu(\mathbf{p})$ to the family $\nu(\mathbf{R})$ of functions we obtain the notions of *$(\alpha, n)_j$-deterministic, α_j-deterministic, almost α_j-deterministic*, and *$(\alpha, \omega)_j$-deterministic* structures $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(\mathbf{R})} \upharpoonright U_0$.

Below we formulate a series of assertions that immediately transformed from the class of structures $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(\mathbf{p})}$ to the class of structures $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(\mathbf{R})}$.

Proposition 7.3. (Monotony) *If a structure $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(\mathbf{R})} \upharpoonright U_0$ is (almost) α_j-deterministic and β is a positive ordinal then the structure $(\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(\mathbf{R})} \upharpoonright U_0) \upharpoonright \beta$ is also (almost) α_j-deterministic.*

Proposition 7.4. *For a structure $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(\mathbf{R})}$ and ordinals α, β, where $\alpha, \beta > 0$, $\beta \in \omega + 1$, the following conditions are equivalent:*

(1) *the structure $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(\mathbf{R})}$ is $(\alpha, \beta)_j$-deterministic;*

(2) *for any sets $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{R}$ and labels $u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}),\alpha,\beta,j}$, $u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{q},\mathbf{r}),\alpha,\beta,j}$, the inequality* $\mathrm{si}_j(u_1 \circ u_2) \leq \alpha$ *holds and if* $\mathrm{si}_j(u_1 \circ u_2) = \alpha$ *then* $\deg_j(u_1 \circ u_2) < \beta$.

Corollary 7.5. *For a structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R})}$ and a positive ordinal α, the following conditions are equivalent:*

(1) *the structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R})}$ is almost α_j-deterministic;*

(2) $\mathrm{si}_j(u_1 \circ u_2) \leq \alpha$ *for any sets $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{R}$ and labels $u_1 \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}),\alpha,j}$, $u_2 \in \rho_{\nu(\mathbf{q},\mathbf{r}),\alpha,j}$.*

Corollary 7.6. *If $\mathrm{si}_j(\mathbf{R})$ is an ordinal then the structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R})}$ is almost $(\mathrm{si}_j(\mathbf{R}))_j$-deterministic.*

Proposition 7.7. *If a structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R})}$ is $(\alpha,\beta)_j$-deterministic then $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R}),\alpha,j} \rightleftharpoons \mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R})} \upharpoonright \alpha_j$ is also $(\alpha,\beta)_j$-deterministic.*

Proposition 7.8. *If $\mathrm{si}(\mathbf{R})$ is an ordinal then the structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R})}$ is $(\mathrm{si}_j(\mathbf{R}))_j$-deterministic if and only if the value $\mathrm{deg}_j(\mathbf{R})$ is not defined or equals 1.*

Proposition 7.9. *A structure $\mathfrak{P}_{\nu(\mathbf{R})}$ is (almost) deterministic if and only if $\mathfrak{SI}_{\nu(R),1,2,j}$ is (almost) 1_j-deterministic.*

Let $\mathbf{R}$ be a nonempty family of nonempty sets of complete 1-types of a theory T, $\nu(\mathbf{R})$ be a regular family of labelling functions, and α be a positive ordinal. The structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R})}$ is called *locally α_j-deterministic* if for any nonempty finite set $\mathbf{R}_0 \subseteq \mathbf{R}$ there is a natural number $n \geq 2$ such that the structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R}_0)}$ is $(\alpha, n)_j$-deterministic.

Repeating the proof of Proposition 5.9 we obtain

Proposition 7.10. *Let $\mathbf{R}$ be a nonempty family of nonempty sets of complete 1-types of a theory T, $\nu(\mathbf{R})$ be a regular family of labelling functions, $\mathrm{si}_j(\cup\mathbf{R}) < \omega$. The following conditions are equivalent:*

(1) *the structure $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R})}$ is locally 1_j-deterministic;*

(2) *the set $\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ is finite for any $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}$;*

(3) *the set $\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}),1,j}$ is finite for any $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}$;*

(4) *the set $\rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q}),1,2,j}$ (consisting of all atoms $u \in \rho_{\nu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$) is finite for any $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}$.*

The notion of (n,p)-type is generalized in the following definition.

Definition 7.11 (K. Ikeda, A. Pillay, A. Tsuboi [10]). Let $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n)$ be types in $S^1(T)$ with disjoint free variables. A type $q(x_1, \ldots, x_n) \in S(T)$ is said to be a *$(p_1, \ldots, p_n)$-type* if $q(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i)$. The set of all $(p_1, \ldots, p_n)$-types of T is denoted by $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$. A theory T is *almost ω-categorical* if for any types $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S(T)$ there are only finitely many types $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$.

Generalizing Definition 7.11 we get

Definition 7.12. Let $\mathbf{p}_1(x_1),\ldots,\ \mathbf{p}_n(x_n)$ be nonempty sets of 1-types in $S(T)$ with disjoint free variables. A type $q(x_1,\ldots,x_n)\in S(T)$ is said to be a $(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)$*-type* if $q(x_1,\ldots,x_n)\supseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}p_i(x_i)$ for some $p_i\in\mathbf{p}_i$, $i=1,\ldots,n$. The set of all $(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)$-types of T is denoted by $S_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n}(T)$.

A type $q(\bar{x})$ in $S_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n}(T)$ containing $\bigcup\limits_{i=1}^{n}p_i(x_i)$ for some $p_i\in\mathbf{p}_i$, $i=1,\ldots,n$, is said to be $(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)$*-principal* if there is a formula $\varphi(\bar{y})\in q(\bar{x})$ such that

$$\cup\{p_i(x_i)\mid i=1,\ldots,n\}\cup\{\varphi(\bar{x})\}\vdash q(\bar{x}).$$

The following lemma obviously generalizes Lemma 5.11.

Lemma 7.13 [1]. *For any nonempty finite sets* $\mathbf{p}_1(x_1),\ldots,\mathbf{p}_n(x_n)$ *of* 1*-types in* $S(\varnothing)$ *the following conditions are equivalent:*

(1) *the set of* $(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)$*-types with free variables in* $(x_1,\ldots,x_n)$ *is finite;*

(2) *any* $(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)$*-type is* $(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)$*-principal.*

By Lemma 7.13, a theory T is almost ω-categorical if and only if for any finite sets $\mathbf{p}_1(x_1),\ldots,\mathbf{p}_n(x_n)$ of complete 1-types, each $(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)$-type is $(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)$-principal.

Proposition 7.10 and Lemma 7.13 imply

Corollary 7.14. *If* $\mathbf{R}$ *is a nonempty family of finite sets of complete* 1*-types of a theory* T, $\nu(\mathbf{R})$ *is a regular family of labelling functions, and all* $(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)$*-types, where* $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\in\mathbf{R}$, *are* $(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)$*-principal then the structure* $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(\mathbf{R})}$ *is locally* 1_j*-deterministic for* $j=1,2$.

Corollary 7.15. *If* T *is an almost* ω*-categorical theory then for any nonempty family* $\mathbf{R}$ *of finite sets of complete* 1*-types and a regular family* $\nu(\mathbf{R})$ *of labelling functions, the structure* $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(\mathbf{R})}$ *is locally* 1_j*-deterministic for* $j=1,2$.

For a nonempty family $\mathbf{R}$ of nonempty sets of 1-types in $S(T)$ and a positive ordinal α, we denote by $\mathrm{SI}_{\mathbf{R},\alpha,j}$ (in a model $\mathcal{M}$ of T) the restriction of set of $(\mathbf{p}\to\mathbf{q})$-links, $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{R}$, to the set of formulas of si_j-ranks $\leq\alpha$:

$$\mathrm{SI}_{\mathbf{R},\alpha,j}\rightleftharpoons\{(a,b)\mid \mathrm{tp}(a)\in\mathbf{p},\mathrm{tp}(b)\in\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{q}\in R,$$

$$\text{and } a\ (\mathbf{p},\mathbf{q})\text{-semi-isolates } b \text{ by a formula } \theta_{\mathbf{p},u,\mathbf{q}}(x,y),\ \text{with } \mathrm{si}_j\text{-rank }\leq\alpha\}.$$

Proposition 7.16. *Let* $\mathbf{R}$ *be a nonempty family of nonempty sets of complete* 1*-types of a theory* T, $\nu(\mathbf{R})$ *be a regular family of labelling functions, and* α *be a positive ordinal. For* $j=1$ *with* $\mathbf{R}$ *consisting of finite sets and for* $j=2$, *the following conditions are equivalent:*

(1) *the relation* $\mathrm{SI}_{\mathbf{R},\alpha}$ (*on a set of realizations of types in* $\cup R$ *in any model* $\mathcal{M} \models T$) *is transitive;*

(2) *the structure* $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R}),\alpha,j}$ *is almost* α_j*-deterministic.*

Proof. is identical to the proof of Proposition 5.13 almost word for word. $\square$

Propositions 1.4 and 7.16 imply the following assertions.

Corollary 7.17. *Let* $\mathbf{R}$ *be a nonempty family of nonempty sets of complete* 1*-types of a theory* T, $\nu(\mathbf{R})$ *be a regular family of labelling functions, and* α *be a positive ordinal. For* $j = 1$ *with* $\mathbf{R}$ *consisting of finite sets and for* $j = 2$, *the following conditions are equivalent:*

(1) *the relation* $\mathrm{SI}_{\mathbf{R},\alpha,j}$, *in any model* $\mathcal{M} \models T$, *is a partial order;*

(2) *the structure* $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R}),\alpha,j}$ *is almost* α_j*-deterministic and* $\rho_{\nu(\mathbf{R}),\alpha,j} \subseteq U^{\leq 0}$.

The partial order $\mathrm{SI}_{\mathbf{R},\alpha,j}$ *is identical if and only if* $\rho_{\nu(\mathbf{R}),\alpha,j} = \{\varnothing, 0\}$.

Corollary 7.18. *Let* $\mathbf{R}$ *be a nonempty family of nonempty sets of complete* 1*-types of a theory* T, $\nu(\mathbf{R})$ *be a regular family of labelling functions, and* α *be a positive ordinal. For* $j = 1$ *with* $\mathbf{R}$ *consisting of finite sets and for* $j = 2$, *the following conditions are equivalent:*

(1) *the relation* $\mathrm{SI}_{\mathbf{R},\alpha,j}$, *in any model* $\mathcal{M} \models T$, *is an equivalence relation;*

(2) *the structure* $\mathfrak{SI}_{\nu(\mathbf{R}),\alpha,j}$ *is almost* α_j*-deterministic and* $\rho_{\nu(\mathbf{R}),\alpha,j} \subseteq U^{\geq 0}$.

The results above substantiate that the diagram in Figure 1 admits the transformation replacing the set $\mathbf{p}$ of types by a nonempty family $\mathbf{R} \subseteq \mathcal{P}(S^1(\varnothing)) \setminus \{\varnothing\}$.

8 $\mathrm{POSTC}_{\mathbf{R}}$-structures

Definition 8.1. Let $\mathbf{R}$ be a nonempty family of nonempty sets,

$$U = U^- \dot\cup \{\varnothing, 0\} \dot\cup U^+ \dot\cup U'$$

be an alphabet consisting of a set U^- of *negative elements*, a set U^+ of *positive elements*, a set U' of *neutral elements*, the empty set $\varnothing$, and zero 0. If $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ are sets in $\mathbf{R}$, we write $u < 0$ and $(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) < 0$ for any element $u \in U^-$, $u > 0$ and $(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) > 0$ for any element $u \in U^+$; $U^{\leq 0} \rightleftharpoons U^- \cup \{\varnothing, 0\}$, $U^{\geq 0} \rightleftharpoons U^+ \cup \{\varnothing, 0\}$. For the set $\mathbf{R}^2$ of all pairs $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}$, we consider a *regular* family $\mu(\mathbf{R})$ of sets $\mu(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \subseteq U$ containing $\varnothing$ such that

- $0 \in \mu(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ if and only if $\mathbf{p} \cap \mathbf{q} \neq \varnothing$;

• $\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})\cap\mu(\mathbf{p}',\mathbf{q}')=\{\varnothing,0\}$ for $(\mathbf{p},\mathbf{q})\neq(\mathbf{p}',\mathbf{q})'$ with $\mathbf{p}\cap\mathbf{q}\neq\varnothing$ and $\mathbf{p}'\cap\mathbf{q}'\neq\varnothing$;

• $\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})\cap\mu(\mathbf{p}',\mathbf{q}')=\{\varnothing\}$ for $(\mathbf{p},\mathbf{q})\neq(\mathbf{p}',\mathbf{q})'$ with $\mathbf{p}\cap\mathbf{q}=\varnothing$ or $\mathbf{p}'\cap\mathbf{q}'\neq\varnothing$;

• $\bigcup\limits_{\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{R}}\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})=U$.

Below we write $\mu(\mathbf{p})$ instead of $\mu(\mathbf{p},\mathbf{p})$, and considering a partial operation $\cdot$ on the set $\mathbf{R}\times\mathcal{P}(U)\times\mathbf{R}$ we shall write, as above, $(\mathbf{p},u,\mathbf{q})\cdot(\mathbf{q},v,\mathbf{r})$ instead of $(\mathbf{p},\{u\},\mathbf{q})\cdot(\mathbf{q},\{v\},\mathbf{r})$.

A structure

$$\mathfrak{M}=\langle\mathbf{R}\times\mathcal{P}(U)\times\mathbf{R};\,\cdot,\trianglelefteq,\vee,\wedge,(\cdot\,\wedge\,\neg\,\cdot),\circ\rangle$$

with a regular family $\mu(\mathbf{R})$ of sets is said to be a $\mathrm{POSTC}_{\mathbf{R}}$-*structure* if the following conditions hold:

• the partial operation $\cdot$ of the structure $\langle\mathbf{R}\times\mathcal{P}(U)\times\mathbf{R};\,\cdot\rangle$ has values $(\mathbf{p},X,\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p}',Y,\mathbf{q}')$ only for $\mathbf{p}'\cap\mathbf{q}\neq\varnothing$, $X\subseteq\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $Y\subseteq\mu(\mathbf{p}',\mathbf{q}')$, and it is generated by the function $\cdot$ for elements in U: for any sets $X,Y\in\mathcal{P}(U)$, $\varnothing\neq X\subseteq\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $\varnothing\neq Y\subseteq\mu(\mathbf{q},\mathbf{r})$, the following equality is satisfied:

$$(\mathbf{p},X,\mathbf{q})\cdot(\mathbf{q},Y,\mathbf{r})=\bigcup\{(\mathbf{p},x,\mathbf{q})\cdot(\mathbf{q},y,\mathbf{r})\mid x\in X,y\in Y\},$$

and if some of X,Y is empty then $(\mathbf{p},X,\mathbf{q})\cdot(\mathbf{q},Y,\mathbf{r})=\varnothing$;

• each restriction $\mathfrak{M}_{\mu(\mathbf{p})}$ of $\mathfrak{M}$ to $\{\mathbf{p}\}\times\mathcal{P}(\mu(\mathbf{p}))\times\{\mathbf{p}\}$ is isomorphic to a POSTC-monoid with the universe $\mathcal{P}(\mu(\mathbf{p}))$, $\mathbf{p}\in\mathbf{R}$; atoms $u\in\mu(\mathbf{p})$ in $\mathfrak{M}_{\mu(\mathbf{p})}$ are called $\mathbf{p}$-*atoms*;

• each restriction $\mathfrak{M}_{\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$, $\mathbf{p}\cap\mathbf{q}=\varnothing$, of $\mathfrak{M}$ to $\{\mathbf{p}\}\times\mathcal{P}(\mu(\mathbf{p},\mathbf{q}))\times\{\mathbf{q}\}$ has empty partial operations $\cdot$ and $\circ$; the restriction of $\mathfrak{M}_{\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ to the relation $\trianglelefteq$ is a preordered set $\langle\{\mathbf{p}\}\times\mathcal{P}(\mu(\mathbf{p},\mathbf{q}))\times\{\mathbf{q}\};\,\trianglelefteq_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\rangle$ with the least element $(\mathbf{p},\varnothing,\mathbf{q})$, the preorder $\trianglelefteq_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ of this structure is induced by the partial order $\trianglelefteq'_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ on the set $\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})$ of labels (forming a upper semilattice) by the following rule: if $X,Y\in\mathcal{P}(\mu(\mathbf{p},\mathbf{q}))$ then $X\trianglelefteq_{\mathbf{p},\mathbf{q}}Y$ if and only if $X=\varnothing$, or for any label $u\in X$ there is a label $v\in Y$ with $u\trianglelefteq_{\mathbf{p},\mathbf{q}}v$ and for any label $v\in Y$ there is a label $u\in X$ with $u\trianglelefteq_{\mathbf{p},\mathbf{q}}v$;

• a label $u\in\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})\setminus\{\varnothing\}$, where $\mathbf{p}\neq\mathbf{q}$, is said to be a $(\mathbf{p},\mathbf{q})$-*atom* if $v\trianglelefteq_{\mathbf{p},\mathbf{q}}u$ implies $v=u$ for any label $v\in\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})\setminus\{\varnothing\}$; only labels in $\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})\cap(U^-\cup U^+)$ may be $(\mathbf{p},\mathbf{q})$-atoms; some labels in $\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})\cap U^{\geq 0}$ lay under each label in $\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})\cap U'$, moreover, if only labels $v\in\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})\cap U^{\geq 0}$

lay under a label $u \in \mu(\mathbf{p},\mathbf{q}) \cap U'$ then there are no greatest labels among labels v; only labels in $\mu(\mathbf{p},\mathbf{q}) \cap U'$ lay over each label in $\mu(\mathbf{p},\mathbf{q}) \cap U'$;

• the operations $\vee, \wedge, (\cdot\ \wedge\ \neg\,\cdot)$ are defined on each set $\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})$ in the structure $\mathfrak{M}_{\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ and form a distributive lattice with relative complements on $\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})$, moreover, for any elements $u, v \in \mu(\mathbf{p},\mathbf{q})$,

$$u \trianglelefteq_{\mathbf{p},\mathbf{q}} v \Leftrightarrow u \wedge v = u \Leftrightarrow u \vee v = v \Leftrightarrow u \wedge \neg v = \varnothing;$$

• the relation $\trianglelefteq$ on the set $\mathbf{R} \times \mathcal{P}(U) \times \mathbf{R}$ is a preorder with minimal elements $(\mathbf{p}, \varnothing, \mathbf{q})$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbf{R}$; this preorder is induced by the union $\trianglelefteq_U$ of preorders $\trianglelefteq_{\mathbf{p}}$ in the structures $\mathfrak{M}_{\mu(\mathbf{p})}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{R}$, and of preorders $\trianglelefteq_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ in the structures $\mathfrak{M}_{\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, on sets of labels in these structures: if $X, Y \in \mathcal{P}(U)$ then $(\mathbf{p}, X, \mathbf{q}) \trianglelefteq (\mathbf{p}', Y, \mathbf{q}')$ if and only if $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}'$, and $X = \varnothing$ or for any label $u \in X$ there is a label $v \in Y$ with $u \trianglelefteq_U v$ and for any label $v \in Y$ there is a label $u \in X$ with $u \trianglelefteq_U v$;

• the partial operations $\vee, \wedge, (\cdot \wedge \neg\,\cdot)$ are defined on the set $\mathbf{R} \times U \times \mathbf{R}$ in the structure $\mathfrak{M}$ being unions of corresponding operations on the sets $\mu(\mathbf{p})$ in $\mathfrak{M}_{\mu(\mathbf{p})}$ and on the sets $\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})$ in $\mathfrak{M}_{\mu(\mathbf{p},\mathbf{q})}$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$;

• the partial operation $\circ$ is defined on the set $\mathbf{R} \times U \times \mathbf{R}$ in the structure $\mathfrak{M}$ being obtained from the union of corresponding operations in the structures $\mathfrak{M}_{\mu(\mathbf{p})}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{R}$, by the following extension: if $u_1 \in \mu(\mathbf{p},\mathbf{q})$ and $u_2 \in \mu(\mathbf{q},\mathbf{r})$ then there is unique element $v \in \mu(\mathbf{p},\mathbf{r})$ such that $(\mathbf{p}, u_1, \mathbf{q}) \circ (\mathbf{q}, u_2, \mathbf{r}) = (\mathbf{p}, v, \mathbf{r})$; this element v is the $\trianglelefteq_{\mathbf{p},\mathbf{r}}$-greatest label in the set $(\mathbf{p}, u_1, \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{q}, u_2, \mathbf{r})$, it is called a *composition* of elements u_1 and u_2 and it is denoted by $u_1 \circ u_2$;

$$(\mathbf{p}, u_1, \mathbf{q}) \circ (\mathbf{q}, \varnothing, \mathbf{r}) = (\mathbf{p}, \varnothing, \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{q}, u_2, \mathbf{r}) = (\mathbf{p}, \varnothing, \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{q}, \varnothing, \mathbf{r}) = (\mathbf{p}, \varnothing, \mathbf{r});$$

• the partial operations $\vee, \wedge, \circ$ on the set $\mathcal{R} \times \mathcal{P}(U) \times \mathcal{R}$ are induced by the corresponding partial operations on the set $\mathcal{R} \times U \times \mathcal{R}$: if $(p, X, q), (p', Y, q') \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}(U) \times \mathcal{R}$ and $\tau \in \{\vee, \wedge, \circ\}$ then the value $(p, X, q)\,\tau\,(p', Y, q')$ is not defined or it is defined and coincides with the set $\{(p, u, q)\,\tau\,(p', v, q') \mid u \in X, v \in Y\}$, in which all values are defined; the partial operation $(\cdot\ \wedge\ \neg\,\cdot)$ on the set $\mathcal{R} \times \mathcal{P}(U) \times \mathcal{R}$ is also induced by the corresponding partial operation on the set $\mathcal{R} \times U \times \mathcal{R}$: if $(p, X, q), (p', Y, q') \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}(U) \times \mathcal{R}$ then the value $(p, X, q) \wedge \neg(p', Y, q')$ is defined only for $p = p'$, $q = q'$, $X, Y \subseteq \mu(p, q)$ and it is equal to $\{(p, u, q) \wedge \neg(p, v, q) \mid u \in X, v \in Y\}$;

• each of the sets U^- and $U^{\geq 0}$ is closed under operations $\vee, \wedge, (\cdot\ \wedge\ \neg\,\cdot)$; the set U' is closed under the operation $\vee$; if $u \in U^-$ and $v \in U^{\geq 0}$ then $(u \vee v) \in U'$;

• repeating the definition in Section 3, each label $u \in U \setminus \{\varnothing\}$ obtains inductively the *j-ranks of semi-isolation* $\mathrm{si}_j(u) \geq 1$, $j = 1, 2$, and the *j-degrees of semi-isolation* $\deg_j(u)$, $\mathrm{si}_j(\varnothing) = 0$, $\deg_j(\varnothing) = 1$, as well as the following attributes are defined: the equivalence relations $\sim_{\alpha,j}$, restrictions $X_{\alpha,j}$ and $X_{\alpha,\beta,j}$ of sets $X \in \{U, U \setminus \{\varnothing\}\}$, and restrictions $\mathfrak{M}'_{\alpha,j}$, $\mathfrak{M}'_{\alpha,\beta,j}$ for restrictions $\mathfrak{M}'$ of the structure $\mathfrak{M}$ to the set of labels of si_j-ranks $\leq \alpha$, and for labels of si_j-rank α to the set of labels of si_j-degree $< \beta$;

• the restriction $\langle \mathbf{R} \times (\mathcal{P}(U) \setminus \{\varnothing\}) \times \mathbf{R};\ \cdot\rangle_{1,2,j}$ of the structure $\mathfrak{M}$ is an $I_{\mathbf{R}}$-structure;

• if $u \in \mu(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ and $u < 0$ then the set $(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{q}, v, \mathbf{r})$ and $(\mathbf{r}, v', \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{p}, u, \mathbf{q})$ consist of negative elements for any $v \in \mu(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ and $v' \in (\mathbf{r}, \mathbf{p})$;

• if $u \in \mu(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $v \in \mu(\mathbf{q}, \mathbf{r})$, $u > 0$, and $v > 0$, then the set $(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{q}, v, \mathbf{r})$ consists of elements in $U^{\geq 0}$;

• if $u \in \mu(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cap (U^{\geq 0} \cup U')$, $v \in \mu(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \cap (U^{\geq 0} \cup U')$, and $u \in U'$ or $v \in U'$, then $(\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{q}, v, \mathbf{r}) \subseteq U'$;

• for any element $u \in \mu(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ with $u > 0$ there is a nonempty set u^{-1} of *inverse* elements $u' > 0$ such that $(\mathbf{p}, 0, \mathbf{p}) \in (\mathbf{p}, u, \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{q}, u', \mathbf{p})$ and $(\mathbf{q}, 0, \mathbf{q}) \in (\mathbf{q}, u', \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{p}, u, \mathbf{q})$, moreover, if $u \lhd v$ and $v \in U^{+}$ then $u^{-1} \subset v^{-1}$;

• if an element $(\mathbf{p}, u, \mathbf{r})$, where $u > 0$, belongs to a set $(\mathbf{p}, v_1, \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{q}, v_2, \mathbf{r})$, where $v_1 \circ v_2 \in U^{+}$, then $(\mathbf{r}, u^{-1}, \mathbf{p}) \subseteq (\mathbf{r}, v_2^{-1}, \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{q}, v_1^{-1}, \mathbf{p})$.

By the definition, each $\mathrm{POSTC}_{\mathbf{R}}$-structure $\mathfrak{M}$ contains $\mathrm{POSTC}_{\mathbf{R}}$-substructures $\mathfrak{M}^{\leq 0}$ and $\mathfrak{M}^{\geq 0}$ being restrictions of $\mathfrak{M}$ to the sets $U^{\leq 0}$ and $U^{\geq 0}$ respectively.

A $\mathrm{POSTC}_{\mathbf{R}}$-structure $\mathfrak{M}$ is called *atomic* if for any nonempty label $u \in \mu(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in \mathbf{R}$, there is a $\mathbf{p}$-atom $v \in U$ such that $v \trianglelefteq_{\mathbf{p}} u$, and for any nonempty label $u \in \mu(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, there is a $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$-atom $v \in U$ such that $v \trianglelefteq_{\mathbf{p},\mathbf{q}} u$.

Combining the proof of Theorems 6.1 and 9.1 in [15] and of Theorems 6.1 and 8.1 in [16] as well as of Theorems 6.1 and 6.2, we get

Theorem 8.1. *For any* (*at most countable and having ordinals* $\sup\{\mathrm{si}_j(u) \mid u \in U\}$) $\mathrm{POSTC}_{\mathbf{R}}$*-structure* $\mathfrak{M}$ *there is a* (*small*) *theory* T *with a nonempty family* $\mathbf{R}' \subset S(T)$ *of nonempty* 1*-types and a regular family* $\nu(\mathbf{R}')$ *of labelling functions such that* $\mathfrak{M}_{\nu(\mathbf{R}')} = \mathfrak{M}$.

In conclusion, we note that, using the operation $\cdot^{\mathrm{eq}}$, the constructions above can be transformed for an arbitrary family of sets of types in $S(T)$.

References

[1] B.S. Baizhanov, S.V. Sudoplatov, and V.V. Verbovskiy, *Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation*, Siberian Electronic Math. Reports, **9** (2012), 161–184.

[2] C.C. Chang and H.J. Keisler, *Model theory*, Elsevier, Amsterdam, 1990.

[3] A.H. Clifford and G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups. Vol.* 1, American Mathematical Society, Providence, 1961.

[4] A.H. Clifford and G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups. Vol.* 2, American Mathematical Society, Providence, 1967.

[5] Yu.L. Ershov, *Decidability problems and constructive models*, Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).

[6] Yu.L. Ershov and E.A. Palyutin, *Mathematical logic*, FIZMATLIT, Moscow, 2011 (in Russian).

[7] *General algebra. Vol.* 1, O.V. Mel'nikov and others; ed. L.A. Skornyakov, Nauka, Moscow, 1990 (in Russian).

[8] *General algebra. Vol.* 2, V.A. Artamonov and others; ed. L.A. Skornyakov, Nauka, Moscow, 1990 (in Russian).

[9] R. Hirsch and I. Hodkinson, *Relation algebras by games*, Elsevier, Amsterdam, 2002.

[10] K. Ikeda, A. Pillay, and A. Tsuboi, *On theories having three countable models*, Math. Logic Quaterly, **44** (1998), 161–166.

[11] E.S. Lyapin, *Semigroups*, American Mathematical Society, Providence, 1974.

[12] R.D. Maddux, *Relation algebras*, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[13] M. Morley, *Categoricity in power*, Trans. Amer. Math. Soc., **114** (1965), 514–538.

[14] S. Shelah, *Classification theory and the number of non-isomorphic models*, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[15] I.V. Shulepov and S.V. Sudoplatov, *Algebras of distributions for binary isolating formulas of a complete theory*, arXiv:1205.3473v1 [math.LO] (2012).

[16] S.V. Sudoplatov, *Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas of a complete theory*, arXiv:1210.4049v1 [math.LO] (2012).

[17] S.V. Sudoplatov, *The Lachlan problem*, NSTU, Novosibirsk, 2009 (in Russian, English version is available in: http://www.math.nsc.ru/~sudoplatov/lachlan_eng_03_09_2008.pdf).

[18] S.V. Sudoplatov and E.V. Ovchinnikova, *Discrete mathematics*, NSTU, Novosibirsk, 2010, 2012 (in Russian).

[19] S.V. Sudoplatov and E.V. Ovchinnikova, *Mathematical logic and theory of algorithms*, NSTU, Novosibirsk, 2010, 2012 (in Russian).

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ БАРДАКОВА И НЕЩАДИМА ДЛЯ МЕТАБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е.И. Тимошенко*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К.Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: algebra@nstu.ru

В.Г.Бардаков и М.В.Нещадим в [1] рассмотрели вопрос о наименьшем числе соотношений некоторых групп в заданной системе порождающих. Этот вопрос связан с проблемой скачка соотношений. Суть проблемы в следующем.

Пусть F – свободная группа конечного ранга и R - некоторая ее нормальная подгруппа, порожденная как нормальная подгруппа конечным числом элементов. Обозначим минимальное число порождающих R как нормальной подгруппы через $d_F(R)$.

Пусть R' – коммутант группы R. Группа F/R' содержит нормальную абелеву подгруппу R/R', которая является модулем над кольцом $\mathbb{Z}(F/R')$. Элементы группы F/R' действуют на модуле сопряжением. Так как элементы из R/R' действуют при этом тождественно, то F/R' можно рассматривать как модуль над фактор-группой F/R' по R/R', то есть F/R' является $\mathbb{Z}(F/R)$– модулем. Если подгруппа R конечно порождена как нормальная подгруппа в F, то $\mathbb{Z}(F/R)$– модуль R/R' также конечно порожден. Обозначим наименьшее количество порождающих этого модуля через $d_{F/R}(R)$. Очевидно, что $d_F(R) \leq d_{F/R}(R/R')$. Верно ли, что для любой нормальной подгруппы R из F, для которой $d_F(R)$ конечно, имеет место равенство $d_F(R) = d_{F/R}(R/R')$? В этом состоит проблема скачка соотношений.

Заметим, что аналогичные вопрос можно исследовать не только для конечно порожденной свободной группы F, но и для любой группы G. Итак, пусть G – произвольная группа, N – ее нормальная подгруппа, имеющая конечное число порождающих как нормальная подгруппа. Группа N/N' является $\mathbb{Z}(G/N)$ – модулем. Определив $d_G(N)$ и $d_{G/N}(N/N')$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 12-01-00084

как раньше, спросим, для каких групп G равенство $d_G(N) = d_{G/N}(N/N')$ справедливо для любой $N \trianglelefteq G$ с ограничением $d_G(N) < \infty$?

Утверждение 1. Пусть G – разрешимая группа и N – нормальная подгруппа из G, допускающая конечное число порождающих как нормальная подгруппа. Тогда $d_G(N) = d_{G/N}(N/N')$.

Доказательство. Пусть элементы $\{r_1, \ldots, r_n\}$ порождают нормальную подгруппу N по модулю N', то есть $\langle r_1, \ldots, r_n\rangle^G N' = N$. Достаточно доказать, что тогда $\langle r_1, \ldots, r_n\rangle^G = N$.

Пусть $M = \langle r_1, \ldots, r_n\rangle^G$ и l, $l \geq 2$, $N^{(l)}$ обозначает l-ый коммутант группы N.

Имеем $MN' = N$. Отсюда для любого $l \geq 2$ получим

$$N = M[MN', MN'] = MN'' = \ldots = MN^{(l)}.$$

Так как для некоторого l группа $N^{(l)}$ тривиальна, то $M = N$. Утверждение доказано.

Автору статьи стало известно доказательство А.Ю.Ольшанского утверждения 1 для любой конечной группы G. Доказательство было отправлено А.Ю.Ольшанским составителям "Коуровской тетради".

С другой стороны, в работе [2] найдены необходимые и достаточные условия, при которых группа, совпадающая со своим коммутантом и порожденная конечным множеством классов сопряженных элементов, не совпадает с нормальным замыканием одного элемента. Если G – такая группа, то очевидно $d_G(G) > 1$, но $d_{G/G}(G/G') = 1$. Однако, как отмечает автор [2], вопрос о существовании таких групп G остается открытым.

Как обычно обозначим $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ для любых элементов g, h из некоторой группы G.

В [1] авторы рассмотрели свободную группу F ранга 4, порождающее множество которой состоит из элементов x, y, z, t, и две ее нормальные подгруппы

$$M = \langle x^p, z^q, [x, y] \cdot [z, t]\rangle^F,$$

$$N = \langle x^p, z^q, [x, y], [z, t]\rangle^F,$$

где p, q – взаимно простые натуральные числа, большие 1. Они доказали

Предложение 1. Для всякого натурального s имеет место равенство

$$F/(M\gamma_s(F)) = F/(N\gamma_s(F)),$$

где $\gamma_s(F)$ обозначает s – ый член нижнего центрального ряда группы F. По определению $\gamma_1(F) = F$, $\gamma_{i+1}(F) = [\gamma_i(F), F]$ при $i \geq 1$.

Бардаков и Нещадим в [1] сформулировали следующий

Вопрос. Можно ли предложение 1 обобщить на случай метабелевых групп? Иными словами, справедливо ли равенство

$$F/(MF'') = F/(NF'')?$$

Ответ на этот вопрос отрицательный даже без предположения, что p и q взаимно просты, и следует из следующего утверждения.

Утверждение 2. При любых p, $q \geq 2$ коммутатор $[x, y]$ не принадлежит подгруппе M.

Доказательство. Рассмотрим вложение Магнуса μ свободной метабелевой группы F/F'' в группу матриц $\mathbb{M}$:

$$x\mu = \begin{pmatrix} \overline{x} & 0 \\ e_1 & 1 \end{pmatrix}, y\mu = \begin{pmatrix} \overline{y} & 0 \\ e_2 & 1 \end{pmatrix} z\mu = \begin{pmatrix} \overline{z} & 0 \\ e_3 & 1 \end{pmatrix}, t\mu = \begin{pmatrix} \overline{t} & 0 \\ e_4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь черта означает образ элемента из группы F в свободной абелевой группе $\overline{F} = F/F'$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ – базис свободного правого $\mathbb{Z}(\overline{F})$ – модуля T. Необходимые сведения о вложении Магнуса приведены, например, в [3, 4].

Нетрудно вычислить образы элементов x^p, z^q, $[x, y][z, t]$ в группе матриц:

$$x^p\mu = \begin{pmatrix} \overline{x}^p & 0 \\ e_1(1 + \overline{x} + \ldots + \overline{x}^{p-1}) & 1 \end{pmatrix},$$

$$z^q\mu = \begin{pmatrix} \overline{z}^q & 0 \\ e_3(1 + \overline{z} + \ldots + \overline{z}^{q-1}) & 1 \end{pmatrix},$$

$$([x, y][z, t])\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e_1(\overline{y} - 1) + e_2(1 - \overline{x}) + e_3(\overline{t} - 1) + e_4(1 - \overline{z}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть R – нормальная подгруппа из $\mathbb{M}$, порожденная матрицами

$$A = \begin{pmatrix} \overline{x}^p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \overline{z}^q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e_1(1 + \overline{x} + \ldots + \overline{x}^{p-1}) & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e_3(1 + \overline{z} + \ldots + \overline{z}^{q-1}) & 1 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e_1(\overline{y} - 1) + e_2(1 - \overline{x}) + e_3(\overline{t} - 1) + e_4(1 - \overline{z}) & 1 \end{pmatrix}.$$

При вложении Магнуса элемент $[x, y]$ отображается в матрицу

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e_1(\overline{y}-1) + e_2(1-\overline{x}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что эта матрица не принадлежит R.

Имеем

$$\langle A, C, P, Q, V\rangle^{\mathbb{M}} = \langle A\rangle^{\mathbb{M}} \langle C\rangle^{\mathbb{M}} \langle P, Q, V\rangle^{\mathbb{M}} = \langle A\rangle [A, \mathbb{M}] \langle C\rangle [C, \mathbb{M}] \langle P, Q, V\rangle^{\mathbb{M}}.$$

Так как $AC = CA$, то

$$\langle A, C, P, Q, V\rangle^{\mathbb{M}} = \langle A\rangle \langle C\rangle [A, \mathbb{M}][C, \mathbb{M}] \langle P, Q, V\rangle^{\mathbb{M}}.$$

Если матрица W принадлежит нормальной подгруппе R, то она принадлежит подгруппе

$$[A, \mathbb{M}][C, \mathbb{M}] \langle P, Q, V\rangle^{\mathbb{M}}.$$

Произведением коммутаторов $[A, f]^{\pm 1}$, $f \in \mathbb{M}$, является матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1-\overline{x}^p)\tau_1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\tau_1 \in T$. Аналогично, любая матрица из $[C, \mathbb{M}]$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1-\overline{z}^q)\tau_2 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\tau_2 \in T$. Из вхождения W в R следует, что найдутся такие элементы $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}(\overline{F})$ и $\tau_1, \tau_2 \in T$ такие, что

$$e_1(\overline{y}-1) + e_2(1-\overline{x}) = \tau_1(1-\overline{x}^p) + \tau_2(1-\overline{z}^q) + e_1\alpha(1+\overline{x}+\ldots+\overline{x}^{p-1}) +$$
$$+ e_3\beta(1+\overline{z}+\ldots+\overline{z}^{q-1}) + e_1\gamma(\overline{y}-1) + e_2\gamma(1-\overline{x}) + e_3\gamma(\overline{t}-1) + e_4\gamma(1-\overline{z}). \tag{1}$$

Пусть

$$\tau_1 = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 + e_3\alpha_3 + e_4\alpha_4,$$
$$\tau_2 = e_1\beta_1 + e_2\beta_2 + e_3\beta_3 + e_4\beta_4. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем

$$\overline{y} - 1 = (1-\overline{x}^p)\alpha_1 + (1-\overline{z}^q)\beta_1 + (1+\overline{x}+\ldots+\overline{x}^{p-1})\alpha + (\overline{y}-1)\gamma, \tag{3}$$

$$1-\overline{x}=(1-\overline{x}^p)\alpha_2+(1-\overline{z}^q)\beta_2+(1-\overline{x})\gamma, \quad (4)$$

$$0=(1-\overline{x}^p)\alpha_3+(1-\overline{x}^q)\beta_3+(1+\overline{z}+\ldots+\overline{z}^{q-1})\beta+(\bar{t}-1)\gamma, \quad (5)$$

$$0=(1-\overline{x}^p)\alpha_4+(1-\overline{z}^q)\beta_4+(1-\overline{z})\gamma. \quad (6)$$

Из (4) следует $\beta_2=\beta_2'(\overline{x}-1)$ для некоторого $\beta_2'\in\mathbb{Z}(\overline{F})$. Значит

$$1=(1+\overline{x}+\ldots+\overline{x}^{p-1})\alpha_2+(1-\overline{z}^q)\beta_2'+\gamma. \quad (7)$$

Из (6) аналогично получим

$$0=(1-\overline{x}^p)\alpha_4'+(1+\overline{z}+\ldots+\overline{z}^{q-1})\beta_4+\gamma \quad (8)$$

для некоторого $\alpha_4'\in\mathbb{Z}(\overline{F})$. Вычитая из (7) равенство (8) получим

$$(1+\overline{x}+\ldots+\overline{x}^{p-1})X+(1+\overline{z}+\ldots+\overline{z}^{q-1})Y=1 \quad (9)$$

для некоторых $X,Y\in\mathbb{Z}(\overline{F})$. Пусть ε_1 – корень уравнения

$$1+\overline{x}+\ldots+\overline{x}^{p-1}=0,$$

а ε_2 – корень уравнения

$$1+\overline{z}+\ldots+\overline{z}^{q-1}=0.$$

Подставляя ε_1 и ε_2 в (9), получим противоречие. Утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Бардаков, М. В. Нещадим, О числе соотношений свободных произведений абелевых групп, СМЖ, т.53, №4 (2012), 591–599.

[2] С. В. Ларин, Об одном вопросе из "Коуровской тетради", Фундаментальная и прикладная математика, т.11, №3 (2005), 119–125.

[3] Е. И. Тимошенко, Эндоморфизмы и универсальные теории разрешимых групп, Монографии НГТУ, Новосибирск 2011, 328 стр.

[4] В. Н. Ремесленников, В. Г. Соколов, Некоторые свойства вложения Магнуса, Алгебра и логика, 9, №5 (1970), 566–578.

МОДЕЛЬНЫЕ МЕТРИКИ И НЕДОСТОВЕРНОСТИ ДЛЯ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ, ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В РАСПОЗНАВАНИИ И КЛАСТЕРИЗАЦИИ

А. А. Викентьев*

Институт Математики им. Академ. С.Л. Соболева СО РАН,
просп. Академ. Коптюга 4, г. Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет,
улица Пирогова 2, г. Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: vikent@math.nsc.ru

1 Введение

В данной работе для формул произвольной n-значной логики предлагаются способы задания мер близости (расстояний, метрик) и степеней недостоверностей, необходимых для алгоритмов кластеризации таких знаний. Степень недостоверности возникла как аналог меры опровержимости. В многозначном случае промежуточные значения истинности можно рассматривать как степени достоверности, а через число таких моделей и в которых формула ложна, выражается степень недостоверности. Этот подход расширяет и обобщает ранее рассмотренные в [1, 2, 3, 9, 14] случаи для $n = 2; 3$ и более для логики Лукасевича. Значения истинности формул можно (в частности) рассматривать как их доли истинности, или как их возможные (субъективные) вероятности, согласованные с таблицами истинности. Наконец, как значения оценки ошибочности формулы-высказывания (полученного от эксперта или базы знаний (БЗ)) в интерпретации, которую предложил и изучал Д. Скотт и другие [4]. Выбор интерпретации зависит от решаемой задачи. В статье, как пример, для понимания рассматривается многозначная

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 11-07-00345а.

логика Лукасевича для любого натурального $n \geq 3$ [4]. Заметим, что не все доказанные в [1, 9] результаты переносятся на общий случай. Числа $n - s, k$ и другие определяемые ниже параметры можно рассматривать как коэффициенты для адаптации и оптимизации вводимых расстояний и мер недостоверности. Для привлечения вероятностных логических высказываний экспертов к построению решающих функций нужны способы вычислений расстояний между такими знаниями. В настоящее время проявляется большой интерес к построению решающих функций [1, 2, 13, 15], а также на основе анализа экспертной информации, заданной в виде логических высказываний (формул), полученных от нескольких экспертов или из БЗ, реализации процессов адаптации и согласования высказываний [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15]. Если высказывания экспертов представлены в виде формул n-значной табулированной логики (например, логики Лукасевича или других [4]), то полученные результаты применимы к ним. Предложенные здесь расстояния и меры недостоверности могут быть использованы для решения различных проблем в области распознавания образов и искусственного интеллекта. Проведен анализ причин возникновения аварийных ситуаций при автоматической заправке емкости. Для формул (конкретных отказах) исследовано поведение расстояний и указана работоспособность степени недостоверности на формулах—высказываниях о неисправностях.

2 Постановка задачи и предварительные сведения

В монографии Г.С. Лбова и Н.Г. Старцевой [1], работах Н.Г. Загоруйко [2] и статье [9] рассматривался и решался вопрос об определении расстояния между формулами исчисления высказываний (ИВ) с помощью привлечения малой теории моделей в [1, 2, 3, 9, 14]. В данной работе будут рассмотрены модельные способы введения расстояний на n-значных (с n значениями истинности) формулах, для которых удалось (точнее, для классов эквивалентных формул) доказать свойства метрики. Хотелось бы иметь характеристику информативности формул для ранжирования многозначных высказываний как в [1, 9]. Для этой цели прозвольной многозначной формуле будет сопоставлена мера (степень) ее недостоверности, отражающая частость ложности формулы в моделях (теории) или недостаточную истинность формулы (высказывания эксперта, из БЗ) в используемых конечных классах моделей. Общий случай к этому сводится. Изучаются и устанавливаются полезные свойства меры недостоверности. При этом представляют особый интерес модели, в которых формулы почти истинны (ближе к 1) или почти ложны (значения дальше от 1). Введенная мера позволит, в частности, по ее значению на формуле косвенно судить о наличии и количестве моделей данной теории, в которых они будут ложными. Говоря о высказываниях, мы всегда будем иметь ввиду формулы логики.

Пусть p, q, r с индексами или без них суть пропозициональные переменные; $\neg$, $\to$ – логические связки, а скобки (,) — вспомогательные символы. Определим понятие формулы. Элементарными формулами будем считать $p, q, r, \ldots$; если A и B – формулы, то 1) $\neg A$ – формула и 2) $A \to B$ – формула. Никакие другие конечные последовательности исходных символов, кроме тех, что построены в соответствии с пунктами 1) - 2), не являются формулами. Конечно можно и сразу добавлять и другие связки.

Посредством исходных связок определяются другие логические связки:

$p \vee q = (p \to q) \to q$ (дизъюнкция),

$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$ (конъюнкция),

$p \equiv q = (p \to q) \wedge (q \to p)$ (эквивалентность).

Матрица вида $M_n^L =< V_n, \neg, \to, \{1\} >$ называется n-значной матрицей Лукасевича ($n \in N, n \geq 2$), где $V_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, ..., \frac{n-2}{n-1}, 1\}$; $\neg$ есть унарная и $\to$ бинарная операция импликации, определенные на множестве V_n следующим образом:

$\neg x = 1 - x$, $x \to y = \min(1, 1 - x + y)$. Операции дизъюнкции и конъюнкции вводятся следующим образом: $x \vee y = (x \to y) \to y = \max(x; y)$, $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) = \min(x, y)$. В других логиках делается аналогично, меняются только таблицы истинности. Выбор подходящей логики вопрос практический и зависит от конкретной прикладной области. Добавления нелогических аксиом к логике, дает теорию, и, вообще говоря, уменьшает количество исходных моделей. Это потому, что добавляются новые аксиомы. Но этим детально заниматься не будем. Все изложенное далее, за исключением приведенных примеров в разделе 7, носит общий характер.

Далее для упрощения обозначений, рядом с формулой (подстрочно) будем указывать ее значение истинности в подходящих моделях [9].

3 Определение модельного расстояния на n-значных формулах

Дадим сначала необходимые определения и обозначения.

Определение 1. Множество элементарных формул $S^n(\varphi)$, используемых при написании формулы (многозначной логики) φ, назовем *носителем формулы* φ.

Определение 2. Объединение носителей формул $(S^n(\Sigma))$, входящих в множество формул Σ, назовем *носителем совокупности формул* Σ, т.е. $S^n(\Sigma) = \bigcup\limits_{\varphi\in\Sigma} S^n(\varphi)$.

Определение 3. Совокупность $Q^n(\Sigma) = \{\varphi_{\frac{k}{n-1}} | \varphi \in S(\Sigma), k = 1, .., n-1\}$ назовем *множеством возможных значений (истинности) носителей* формул. Нижний индекс у элементарной формулы указывает ее значение истинности в n-значной логике.

Определение 4. *Моделью* M назовем любое подмножество $Q^n(\Sigma)$ такое, что M не содержит одновременно формул $\varphi_{\frac{k}{n-1}}$ и $\varphi_{\frac{l}{n-1}}$ для всех различных k, l и любого носителя $\varphi \in S(\Sigma)$.

Множество всех моделей будем обозначать $P^n(S(\Sigma))$.

Для упрощения записи, верхний индекс в обозначения, означающий значность высказывания, будем опускать, когда из контекста это ясно.

Лемма 1. (о мощности множества моделей $P^n(S(\Sigma))$). Общее число моделей n-значной логики с конечным множеством носителей равно $|P(S(\Sigma))| = n^{|S(\Sigma)|}$.

Доказательство. Докажем лемму индукцией.

Пусть $S(\Sigma) = \{A\}$; $|S(\Sigma)| = 1$. Тогда $P(S(\Sigma)) = \{\{A\}, \{A_{\frac{n-2}{n-1}}\}, ..,$ $\{A_{\frac{1}{n-1}}\}, \emptyset\}$ и $|P(S(\Sigma))| = n$. Пусть утверждение леммы верно для $S(\Sigma) = \{A^1, A^2, .., A^{k-1}\}$, $|S(\Sigma)| = k-1$. Тогда $|P(S(\Sigma))| = n^{|S(\Sigma)|}$.

Докажем утверждение леммы для $S(\Sigma') = \{A^1, A^2, ...A^k\}$, $|S(\Sigma')| = k$. Из того, что верно равенство $P(S(\Sigma')) = P(S(\Sigma)) \cup \cup \{M \cup \{A^k_1\} | M \in P(S(\Sigma))\} \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{n-2}{n-1}}\} | M \in P(S(\Sigma)) \cup \ldots \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{1}{n-1}}\} | M \in P(S(\Sigma))\}\}$, получим включение $P(S(\Sigma')) \supseteq P(S(\Sigma)) \cup \{M \cup \{A^k_1\} | M \in P(S(\Sigma))\}$ $\cup \{M \cup \{A^k_{\frac{n-2}{n-1}}\} | M \in P(S(\Sigma)) \cup .. \cup \{M\{A^k_{\frac{1}{n-1}}\} | M \in P(S(\Sigma))\}\}$. Докажем обратное включение. Пусть $M \in P(S(\Sigma'))$, тогда если $A^k_l \in M$, где $l \in \{\frac{n-1}{n-1}, \frac{n-2}{n-1}, ..., 0\}$, то $M \backslash A^k_l \in P(S(\Sigma))$; если $A^k_l \notin M$, то $M \in P(S(\Sigma))$. Следовательно,$P(S(\Sigma')) \subseteq P(S(\Sigma)) \bigcup \cup \{M \cup \{A^k\} | M \in P(S(\Sigma))\} \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{n-2}{n-1}}\} | M \in P(S(\Sigma))\} \cup .. \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{1}{n-1}}\} | M \in P(S(\Sigma))\}\}$. Значит, верны равенства

$$|P(S(\Sigma'))| = |P(S(\Sigma))| + |P(S(\Sigma))| + ... + |P(S(\Sigma))| =$$
$$= n|P(S(\Sigma))| = n * n^{|S(\Sigma)|} = n^{|S(\Sigma)|+1} = n^{|S(\Sigma')|}$$

Что и требовалось доказать.

Дадим определения значений истинности формул на модели.

Определение 5. Элементарная формула–переменная A *принимает на модели M значение* $\frac{k}{n-1}$, где k=1,..., $n-1$, если $A_{\frac{k}{n-1}} \in M$, т.е. $M|{=}A_{\frac{k}{n-1}} \Leftrightarrow A_{\frac{k}{n-1}} \in M$.

Определение 6. Элементарная формула–переменная A *принимает на модели M значение* 0, если $A_{\frac{k}{n-1}} \notin M$ для всех $k = 1, .., n-1$.

Далее, используя определения истинностных значений формул для логики Лукасевича, получаем:

3) $M| = (A\&B)_{\frac{k}{n-1}} \Leftrightarrow (M| = A_{\frac{p}{n-1}}$и $M| = B_{\frac{q}{n-1}})$, где $\min(p,q) = k$

4) $M| = (A \vee B)_{\frac{k}{n-1}} \Leftrightarrow (M| = A_{\frac{p}{n-1}}$ и $M| = B_{\frac{q}{n-1}})$, где $\max(p,q) = k$

5) $M| = (\neg A)_{\frac{k}{n-1}} \Leftrightarrow M| = A_{\frac{n-1-k}{n-1}}$

Во всех остальных случаях формулы принимают значения 0.

Для формулировки других свойств, введем обозначения:

$Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} = \{M|M \in P(S(\Sigma)), M| = A_{\frac{k}{n-1}}\}$ – подмножество моделей, на которых формула А принимает значение $k/(n-1)$ и $Mod_{S(\Sigma)}(A_0) = \{M|M \in P(S(\Sigma)), M| \neq A_{\frac{k}{n-1}}, 4; \text{где } k = 1, ..., n-1\}$ – подмножество моделей, на которых формула А ложна.

Сформулируем важные для дальнейшего теоретико-модельные свойства:

Лемма 2 . 1) $Mod_{S(\Sigma)}((A\&B)_{\frac{k}{n-1}}) = \bigcup_{p=k}^{n-1}((Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{p}{n-1}} \bigcap Mod_{S(\Sigma)}(B)_{\frac{k}{n-1}}) \bigcup (Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} \bigcap Mod_{S(\Sigma)}(B)_{\frac{p}{n-1}})$;

2) $Mod_{S(\Sigma)}((A \vee B)_{\frac{k}{n-1}}) = \bigcup_{p=0}^{k}((Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{p}{n-1}} \bigcup Mod_{S(\Sigma)}(B)_{\frac{k}{n-1}}) \bigcup (Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} \bigcup Mod_{S(\Sigma)}(B)_{\frac{p}{n-1}}$;

3) $Mod_{S(\Sigma)}(\neg A)_{\frac{k}{n-1}} = Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{n-1-k}{n-1}}$;

4) $\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} = P(S(\Sigma)) \backslash Mod_{S(\Sigma)}(\neg A)_1$

Таким образом, любой формуле φ такой, что $S(\varphi) \subseteq S(\Sigma)$ соответствует совокупность $Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}, \quad k = 1, ..., n-1$ – моделей из $P(S(\Sigma))$, на которых формула φ принимает значения $\frac{k}{n-1}, \ \ k = 1, ..., n-1$ соответственно.

Определение 7. Назовем формулы φ и ψ *эквивалентными* (далее коротко $\varphi \equiv \psi$), если $\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} = \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}$. Это отношение на формулах будет *отношением эквивалентности.* У таких эквивалентных формул всегда совпадают множество моделей, где они принимают значение 0. Для обобщения можно рассматривать это равенство начиная суммирование с 2, или 3 и т.д., а вместо одного значения в формуле расстояния использовать дизъюнкцию предыдущих до начального индекса суммирования. Очевидно, что формулы будут эквивалентны, если они имеют одно и тоже множество моделей для каждого k (более тонкая эквивалентность). В этом случае можно ввести расстояние с весами для каждого k, модифицируя (смотри ниже замечание 1) следующее определение.

Определение 8. ***Расстоянием*** между формулами φ и ψ (при условии $S(\varphi)\bigcup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$) на конечном множестве моделей $P(S(\Sigma))$ n-значной логики назовем нормированную обобщенную симметрическую разность, т.е. величину

$$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi) = \frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)| + |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0 \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}.$$

Замечание 1. Это расстояние является естественным обобщением расстояния для 2-значной логики. Поясним смысл первого слагаемого в числителе формулы. В нем подсчитывается число моделей формулы φ с различными ненулевыми истинностными значениями, а формула ψ при этом должна быть ложной. Аналогично интерпретируется второе слагаемое с заменой индексов у формул φ и ψ. По сути своей сумма в числителе выражения дает некоторую симметрическую разность всех моделей для этих двух формул.

Очевидно, что нижнее значение k в объединении можно варьировать: заменить его на подходящее разумное с точки зрения экспертов число s: $n-1 > s > 1$, при этом формулируемые далее свойства расстояний и их доказательства сильно не изменятся. Ввиду громозкости общего случая далее приводим только случай $k = s = 1$,но доказательство применимо и к случаю когда рассматриваются не только ложные значения для второй из формул в модели, но и с маленькими значениями истинности (близкими к 0), если при этом задано подходящее отношение эквивалентности. Аналогичное замечание для параметров справедливо при определении меры недостоверности (см. далее). Более общее расстояние получится, если вводить расстояние как выше, но с коэффициентами- весами $a(i)$, заданные, например, экспертом
$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} a(k)|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)| + \sum_{k=1}^{n-1} a(k)|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0 \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}$. В случае получения (или наличия) нескольких способов задания коэффициентов, а значит расстояний, можно рассмотреть усредненное с весами новое расстояние. Возникает вопрос о нахождении расстояния наиболее

адекватно учитывающего каждое из имеющихся. Тот факт, что это тоже расстояния следует из других соображений, но в такой формуле более тонко учитывается вес моделей соответственно интерпретации значения истинности на ней формул, так и возможности учета расстояний заданных с помощью других коэффициентов (например, от экспертов или интерпретаци). Далее здесь, для простоты изложения, рассматриваем случай, когда все коэффициенты, как в определении 8 , равны 1. То, что взяли значение формулы 0 в формуле расстояния тоже не важно.

4 Свойства расстояния

Теорема **1.** (о свойствах расстояния $\rho_{S(\Sigma)}$). Для любых формул φ, ψ таких, что $S(\varphi)\bigcup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$ справедливы следующие утверждения:

1) $0 \leq \rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) \leq 1$;

2) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi){=}\rho_{S(\Sigma)}(\psi, \varphi)$;

3) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi){=}0 \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi$;

4) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi){=}1 \Leftrightarrow \bigcup_{l=1}^{n-1}\bigcup_{k=1}^{n-1}(Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} \oplus Mod(\psi)_{\frac{l}{n-1}}) = P(S(\Sigma))$, где $\oplus$– прямое объединение;

5) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) \leq \rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \chi) + \rho_{S(\Sigma)}(\chi, \psi)$;

6) Если $\varphi^1 \equiv \varphi^2$, то $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi^1, \psi){=}\rho_{S(\Sigma)}(\varphi^2, \psi)$.

Доказательство проводим для каждого пункта.

1) Очевидно, что $0 < \rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) < 1$. Верхняя и нижняя границы достижимы. Приведем примеры формул, на которых они достигаются:

- $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \varphi) = 0$;

- Пусть φ - формула, не принимающая промежуточные значения $\frac{k}{n-1}$, $\quad k = 1, ..., n-2$, то $\neg\varphi$- также не принимает значения $\frac{k}{n-1}$, $\quad k = 1, ..., n-2$. Тогда $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \neg\varphi) = 1$.

2) Данное свойство следует из определения расстояния и симметричности связок.

3) Докажем необходимость. Нетрудно понять, что

$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}(|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}| + |Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}|) -$
$-2\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{p}{n-1}} \& \psi_{\frac{q}{n-1}})|{=}0$, или

$\sum_{k=1}^{n-1}(|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}| + |Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}| =$
$= 2\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{p}{n-1}} \& \psi_{\frac{q}{n-1}})|. \qquad (1)$

Очевидно, что
$\sum_{k=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}| = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_{\frac{s}{n-1}})|$; аналогично
$\sum_{k=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}| = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{s}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})| \Rightarrow$
$\sum_{k=1}^{n-1}(|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}| + |Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}|) =$

$= 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{s}{n-1}})| + \sum_{k=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)| +$
$+ \sum_{k=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|.$ (2)

Вычитая (1) из (2) , получим $\sum_{k=1}^{n-1}(|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)| +$
$+ |Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)| = 0$
$\Rightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\psi)_{\frac{k}{n-1}}$, (3)

по симметрии имеем
$\sum_{k=1}^{n-1}|Mod_{s(\Sigma)}(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}})| = 0 \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} \supseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\psi)_{\frac{k}{n-1}}$.
(4)

Следовательно, из (3) и (4) получаем необходимое $\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} = \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{s(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \varphi \equiv \psi.$

Докажем обратное: если $\varphi \equiv \psi$, то $\rho(\varphi,\psi) = 0$. По определению $\varphi \equiv \psi$ означает, что
$\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} = \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}$. Тогда $\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\psi)_{\frac{k}{n-1}} \Rightarrow Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0) = 0$. Очевидно, что справедливы импликации
$|Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)| = 0$ для любых $k \Rightarrow |Mod(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}})| = 0$ для любых k;
$\Rightarrow \rho(\varphi,\psi) = \frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)| + |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\varphi)|}{n^{|S(\Sigma)|}} = 0$. Что и требовалось.

4) Ясно, что $\rho(\varphi,\psi) = 1 \Leftrightarrow |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)| +$
$+ |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}})| = n^{|S(\Sigma)|}$ (5)

и, рассматривая всевозможные случаи для определения числа всех моделей, имеем $n^{|S(\Sigma)|} = |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)| + |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\varphi_0)| +$
$+ |\bigcup_{p=1}^{n-1}\bigcup_{q=1}^{n-1} Mod(\varphi_{\frac{p}{n-1}}\&\psi_{\frac{q}{n-1}})| + |Mod(\varphi_0\&\psi_0)|$. (6)

Из (5)-(6) получаем, что:
$|\bigcup_{p=1}^{n-1}\bigcup_{q=1}^{n-1} Mod(\varphi_{\frac{p}{n-1}}\&\psi_{\frac{q}{n-1}})| + |Mod(\varphi_0\&\psi_0)| = 0,$

т.е. φ и ψ одновременно не принимают значение 0 и различные значения. Если φ принимает значение не 0, то значение ψ обязательно равно 0, поэтому, $\bigcup_{l=1}^{n-1}\bigcup_{k=1}^{n-1}(Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} \oplus Mod(\psi)_{\frac{l}{n-1}}) = P(S(\Sigma))$. То есть модели $Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}$ для $k = 1,...,n-1$ и модели $Mod(\psi)_{\frac{l}{n-1}}$ для $l = 1,...,n-1$ образуют непересекающиеся множества, причем их объединение заполняет все рассматриваемое пространство моделей.

5) Докажем неравенство треугольника. По определению расстояний, простыми преобразованиями над выражениями, получим верные импликации и, в конце, требуемое

$$\rho(\varphi,\chi)=\frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0)|+\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}},$$
$$\rho(\varphi,\psi)=\frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}},$$
$$\rho(\psi,\chi)=\frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0)|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\psi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}},$$

$Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0)=\bigcup_{l=0}^{n-1}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0\&\psi_{\frac{l}{n-1}})$. Следовательно

$$\rho(\varphi,\chi)n^{|S(\Sigma)|}=|\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1}Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0\&\psi_{\frac{l}{n-1}})|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1}Mod(\varphi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{l}{n-1}})|,$$

$$\rho(\varphi,\psi)n^{|S(\Sigma)|}=|\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1}Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0\&\chi_{\frac{l}{n-1}})|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1}Mod(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_{\frac{l}{n-1}})|,$$

$$\rho(\psi,\chi)n^{|S(\Sigma)|}=|\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1}Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0\&\varphi_{\frac{l}{n-1}})|+|\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1}Mod(\psi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\varphi_{\frac{l}{n-1}})|,$$

$$\rho(\varphi,\chi)n^{|S(\Sigma)|}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}|Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0\&\psi_{\frac{l}{n-1}})|+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}|Mod(\varphi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{l}{n-1}})|+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0\&\psi_0)|+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod(\varphi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)|,$$

$$\rho(\varphi,\psi)n^{|S(\Sigma)|}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}|Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0\&\chi_{\frac{l}{n-1}})|+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}|Mod(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_{\frac{l}{n-1}})|+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0\&\chi_0)|+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod(\varphi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)|,$$

$$\rho(\psi,\chi)n^{|S(\Sigma)|}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}|Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0\&\varphi_{\frac{l}{n-1}})|+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}|Mod(\psi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\varphi_{\frac{l}{n-1}})|+$$

$+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}}\&\chi_0\&\varphi_0)|+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod(\psi_0\&\chi_{\frac{k}{n-1}}\&\varphi_0)|$. Неравенство $\rho(\varphi,\chi)\leq\rho(\varphi,\psi)+\rho(\psi,\chi)$ легко следует из полученных равенств;

6) Эквивалентность $\varphi^1\equiv\varphi^2$ означает, что $\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi^1)_{\frac{k}{n-1}}=$ $=\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi^2)_{\frac{k}{n-1}}$ $\Rightarrow$(ограничивая на одно и то же множество) имеем $\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi^1_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)=\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi^2_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)$, оставшееся аналогично и равенство расстояний доказано.

Замечание 2. Из Теоремы 1 следует, что на классах эквивалентности n-значных формул можно эффективно задать метрику. Из замечания 1 следует, что есть и другие расстояния, например, если фиксировать вместо 0 другое значение истинности, доказательство пройдет. Введенное расстояние рассматривается на конечном множестве $P^n(S(\Sigma))$ всех моделей. Так как доказательства не используют свойств всего множества моделей, то расстояние можно рассматривать на любом осмысленном подмножестве всех моделей, если это необходимо или вытекает из условий конкретной задачи. Вычисление расстояний можно упростить, поскольку носители формул часто составляют небольшое подмножество всех носителей формул. Работая с моделями над этим подмножеством носителей, упростятся необходимые подсчеты. Следующая теорема доказывает в общем случае возможность упрощения.

Теорема 2 (об инвариантности расстояния при добавлении новых переменных). Для любых $S(\Sigma_0)$ и $S(\Sigma_1)$ таких, что $S(\varphi)\bigcup S(\psi)\subseteq S(\Sigma_0)$ $\subseteq S(\Sigma_1)$ имеет место равенство $\rho_{S(\Sigma_0)}(\varphi,\psi)=\rho_{S(\Sigma_1)}(\varphi,\psi)$.

Доказательство. Рассмотрим $S(\Sigma_1)=S(\Sigma_0)\bigcup\{\chi\}$, $\chi\notin S(\Sigma_0)$. При этом $P(S(\Sigma_1))=P(S(\Sigma_0))\bigcup(\bigcup_{k=1}^{n-1}\{M\bigcup\{\chi_{\frac{k}{n-1}}\}|M\in P(S(\Sigma_0))\})$ и $|P(S(\Sigma_1))|=n|P(S(\Sigma_0))|$.

Также верно $|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{S(\Sigma_1)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi)|=n|\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod_{S(\Sigma_0)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)|$. Таким образом, верно

$$P(S(\Sigma_1))=\overbrace{\underbrace{P(S(\Sigma_0))\bigcup}_{1}\underbrace{\bigcup_{k=1}^{n-1}\underbrace{\{M\bigcup\{\chi_{\frac{k}{n-1}}\}|M\in P(S(\Sigma_0))\}}_{1}}_{n-1}}^{n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_{S(\Sigma_1)}(\varphi,\psi) = \frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma_1)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)| + |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma_1)}(\varphi_0 \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma_1)|}} =$$
$$= \frac{n|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma_0)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)| + n|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma_0)}(\varphi_0 \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n \cdot n^{|S(\Sigma_0)|}} =$$
$$= \rho_{S(\Sigma_0)}(\varphi,\psi).$$

Пусть теперь $|S(\Sigma_1)\backslash S(\Sigma_0)| = |\{A^1,...,A^m\}| = m \geq 1$. Тогда $\rho_{S(\Sigma_0)}(\varphi,\psi) = \rho_{S(\Sigma_0)\bigcup\{A^1\}}(\varphi,\psi) = ... = \rho_{S(\Sigma_0)\bigcup\{A^m\}}(\varphi,\psi) = \rho_{S(\Sigma_1)}(\varphi,\psi)$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. Из только что доказанного следует, что предположение о конечности в теореме 1 можно убрать. Упрощение вычисления расстояний состоит в уменьшении до конечного как числа носителей, так и числа рассматриваемых моделей. Возможно, дальнейшее уменьшение числа моделей для введения расстояния, кроме уточнения аксиом прикладной теории, новых результатов, возможно потребует привлечение когнитивных методов в распознавании. При поиске способов задания расстояния было рассмотрено большое количество других вариантов, отличные от предложенных выше, но для них свойства метрики не выполнялись. В наши планы это не входило, но возможно в некоторых прикладных задачах достаточно и меры сходства или близости. Заметим, что в первой формуле расстояния можно вместо индекса 0 взять и другие значения истинности (конечно, например, при самом строгом отношении эквивалентности), и, соответственно, поменяв множество индексов суммирования, получим другое расстояние между формулами, можно выделить и несколько значений, например по первым двум или более. Затем, взяв усредненную сумму всех таких расстояний с весами, получим новое расстояние, более полно учитывающее все значения истинности формул. Аналог теоремы 2 верен и для меры недостоверности. Далее этим в дальнейшем будем пользоваться. Из приведенных доказательств и введенных расстояний следует подсказка как определять расстояние между многоместными формулами Исчисления предикатов. Для этого надо использовать измеримые многозначные модели теории описываемой прикладной области и в такой модели на реализациях(решениях)формул определять расстояние как указано выше тем или иным способом привлекая конечнозначную (или вероятностную) меру для вычисления мер нужных формульных множеств. Свойства метрики в модели на эквивалентных формулах будут выполняться, аналогично поступаем с мерой недостоверности. Так что и в этом важном случае ИП появляются инструменты для адаптации различных алгоритмов кластеризации, поиска коллективных алгоритмов с весами.

5 Определение меры недостоверности n-значных формул

Истинная формула на модели является достоверной и поэтому не может быть недостоверной. Ложная формула на модели не является достоверной и значит недостоверна. Формула с промежуточным значением истинности является частично недостоверной. Это согласовывается также с интерпретацией промежуточных значаний истинности М. Берда- А. Карпенко [4] через 0 и 1. Из сказанного следует, что вводимая степень недостоверности определяется частью моделей, где значения формулы не являются истинными. Подход к определению меры недостоверности в n-значном случае отражает вклад (в недостоверность) значений истинности формулы, не включая 1. Он основан на свойстве таких значений истинности формулы: чем больше (частота) моделей на которых данное высказывание принимает не истинное (не равное 1) значение, то тем меньше (и частота) моделей, где оно будет истинно (в данной изучаемой теории) . При условии истинности формулы (а это нам важно) на некоторой модели (некоторой теории), и чем больше моделей на которых она недостоверна, тем меньше моделей где она истинна. Если на многих моделях формула недостоверна, то число моделей у нового расширения теории (теории с добавленной этой формулой) будет существенно меньше. Тогда мера недостоверности будет, естественно, выше. Частоты моделей, в которых значения истинности формулы не равны 1, предлагается (по интерпретации) учитывать с весами, пропорциональными ее ложности . Поэтому число моделей с меньшими значениями истинности формулы следует учитывать с большим коэффициентом-весом. Перейдем к формальному определению. Меру недостоверности $I_{S(\Sigma)}(\varphi)$ для формулы из $\Phi(\Sigma) = \{\varphi | S(\varphi) \subset S(\Sigma)\}$ n-значной логики зададим в виде

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}.$$

Параметры α_i в формуле (в общем случае) монотонно не возрастают с ростом индекса суммирования. Например, при нечетном n можно взять

такими: $\begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq 1; \\ \alpha_i + \alpha_{n-1-i} = 1 \qquad \forall i = 0, ..., \frac{n-1}{2} \quad ; \\ \alpha_k \geq \alpha_i \qquad \forall k \leq i. \end{cases}$

Существование таких параметров очевидно. Отмеченные соотношения вытекают, например, из свойств интерпретаций для n-значной логики Лукасевича.

Замечание 4. В случае $n = 2$ и $\alpha_i = 1$ получаем меру опровержимости как в [1, 9] . В общем случае вместо $n-2$ можно рассматривать $n-s$ (s вместо 2-ки), где s больше 1, но меньше $n-1$ (что соответствует равенству 0 соответствующих весов для моделей с большим (например, 0.7) значением истинности формулы (пренебрегая, если это допустимо, малым числом моделей, где она не истинна). В приведенном определении $s = 2$. В приложениях все фигурирующие в определении параметры являются адаптируемыми и оптимизируемыми по найденным критериям качества в конкретной задаче. Первоначально планировалось задание меры недостоверности как расстояние от тождественно истинной формулы. Вообще говоря, не ясно, что предлагаемые нами коллективные расстояния от 1, будут задавать введенную выше меру недостоверности. Оказалось, что такое расстояние (метрика) полно учитывающее многозначность формул существует, но это предмет другой статьи автора совместно с моим магистрантом Кабановой Е.С.

6 Свойства меры недостоверности

Теорема 3.(о свойствах меры $I_{S(\Sigma)}$). Для любых формул $\varphi,\psi \in \Phi(\Sigma)$верно

1) $0 \le I_{S(\Sigma)}(\varphi) \le 1$;

2) $I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\neg\varphi) = 1$;

3) $I_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi) \ge \max\{I_{S(\Sigma)}(\varphi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;

4) $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \le \min\{I_{S(\Sigma)}(\varphi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;

5) $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) + I_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi) = I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\psi)$.

Доказательство проводится для каждого пункта при s=2.

1) Неравенство очевидно, т.к. $Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})$ попарно не пересекаются, а в объединении дают все множество $P(S(\Sigma))$. Свойство 1) доказано.

2) $I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\neg\varphi) =$(расписывая и переставляя слагаемые)
$= \alpha_0 \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0)|}{n^{|S(\Sigma)|}} + \alpha_{n-1} \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_1)|}{n^{|S(\Sigma)|}} +$
$+ \sum_{i=1}^{n-2} (\alpha_i + \alpha_{n-1-i}) \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} = \frac{|P(S(\sum))|}{n^{|S(\sum)|}} = 1.$

3) Распишем по определению степени недостоверности для $I_{S(\Sigma)}(\varphi)$, $I_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi)$ и получим равенства:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi) = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}((\varphi\&\psi)_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} =$$

$= \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i(\sum_{k=i}^{n-1}(\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} + \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}))$-
$-\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}$. (7)

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} = \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=i}^{n-1}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} + \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=0}^{i}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} -$$

$-\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}$. (8)

Вычитая (8) из (7), получаем:

$I_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi) - I_{S(\Sigma)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{k=i}^{n-1}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} -$
$-\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{k=i}^{n-1}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} =$
$= \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{i}(\alpha_k - \alpha_i)\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} +$
$+\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{k=i}^{n-1}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} \geq 0.$

Получили, что $I_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi) \geq I_{S(\Sigma)}(\varphi)$. Аналогичное неравенство можно получить для формулы ψ: $I_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi) \geq I_{S(\Sigma)}(\psi)$. Следовательно $I_{S(\Sigma)}(\varphi\&\psi) \geq \max\{I_{S(\Sigma)}(\varphi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$. Свойство 3) доказано.

4) Расписывая по определению меры недостоверности $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi)$, получаем справедливые равенства:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi) = \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}((\varphi\vee\psi)_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} = \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i(\sum_{k=0}^{i}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} +$$

$+\sum_{k=0}^{i}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}) - \sum_{i=0}^{n-2}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}.$ (9)

Распишем подробно выражение $I_{S(\Sigma)}(\varphi)$:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} = \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=i}^{n-1}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} + \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=0}^{i}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} -$$

$-\alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\sum)|}}$. (10)

Используя полученные равенства, вычитая (9) из (10) получаем:

$I_{S(\Sigma)}(\varphi) - I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \sum_{k=i}^{n-1} \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\sum)|}} +$
$+ \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \sum_{k=0}^{i} \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\sum)|}} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{k} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\sum)|}} -$
$- \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \sum_{k=0}^{i} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\sum)|}} \geq$
$\geq \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{i} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\sum)|}} \geq 0.$

Откуда следует, что $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \leq I_{S(\Sigma)}(\varphi)$. Аналогичное неравенство получим для формулы ψ: $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \leq I_{S(\Sigma)}(\psi) => I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \leq \min\{I_{S(\Sigma)}(\varphi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$. Свойство 4) доказано.

5) Из формул (7)- (10) непосредственно следует формула:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) + I_{S(\Sigma)}(\varphi \& \psi) = I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\psi).$$

Замечание 5. Конечно, меру недостоверности формулы можно было ввести через истинностные значения отрицания формулы, с монотонно неубывающими коэффициентами, но это по существу и сделано. Связь введенной степени недостоверности формулы с приведенными выше расстояниями между ее компонентами и их недостоверностями не такая простая как в случае логических исчислений при $n = 2$, $n = 3$ [1, 9, 18, 19, 20, 22, 25]. Можно смело предположить, что в любом другом из приведеных случаев нет простой связи между недостоверностью самой формулы, расстоянием между ее образующими компонентами и степенями недостоверности этих компонент.

7 Апробация подхода

В качестве примера нами рассмотрено дерево событий, используемого для анализа причин возникновения аварийных ситуаций при автоматизированной заправке емкости. Структура дерева событий включает одно головное событие (авария, инцидент), которое соединяется с набором соответствующих нижестоящих событий (ошибок, отказов, неблагоприятных внешних воздействий), образующих цепи причин (сценарии аварий).

Проанализированы записанные по дереву (отказов заправки) различные сложные логические высказывания экспертов (формулы) о конкретных отказах заправочной станции и найдены расстояния между различными формулами и степени их недостоверности при различных n.

Результаты вычислений показали адекватность (согласованность с мнениями специалистов и экспертов) предлагаемого подхода, большую корректность и похожесть результатов со случаями $n = 2$ и $n = 3, 5$, а также быструю стабилизацию вычисляемых величин с увеличением числа n. Упорядочение формул по степени (возрастания) недостоверности согласуется не только с мнениями опытных экспертов автоматизированной заправки, но и результатами, полученными для $n = 2$ и $n = 3$ [9].

Обозначим базовые события, которые изначально были записаны цифрами в вершинах дерева, через $A1, \ldots, A13$. События, появление которых приводит к аварии, можно записать следующим образом :

$(A_{12} \vee A_{13})$, $(A_1 \wedge A_7)$, $(A_1 \wedge A_8)$, $(A_1 \wedge A_{10})$, $(A_1 \wedge A_{11})$, $(A_2 \wedge A_7)$, $(A_2 \wedge A_{10})$, $(A_2 \wedge A_{11})$, $(A_2 \wedge A_9)$, $(A_3 \wedge A_7)$, $(A_3 \wedge A_{10})$, $(A_3 \wedge A_{11})$, $(A_4 \wedge A_7)$, $(A_4 \wedge A_8)$, $(A_4 \wedge A_{11})$, $(A_5 \wedge A_6 \wedge A_7)$, $(A_5 \wedge A_6 \wedge A_8)$, $(A_5 \wedge A_6 \wedge A_7)$, $(A_5 \wedge A_6 \wedge A_8)$, $(A_5 \wedge A_6 \wedge A_9)$, $(A_5 \wedge A_6 \wedge A_{10})$, $(A_5 \wedge A_6 \wedge A_{11})$.

С другой стороны, существует набор событий, который гарантирует не возникновение головного события при условии, если ни одно из событий, входящих в него, не произойдет. Так авария не произойдет, например, если не будет событий $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_{12}, A_{13})$ или событий $(A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13})$.

Далее определим различные события и посчитаем расстояние между ними и меру опровержимости.

$\varphi_1 = (A_2 \vee (A_5 \wedge A_6))$-данное событие состоит в том, что произойдет обрыв цепей от датчиков объёма дозы или одновременно откажет расходомер и датчик уровня. Возникновение только этого события не ведет к головному событию, т.е. к аварии.

$\varphi_2 = ((A_9 \vee A_3) \vee (A_5 \wedge A_6))$ - это событие, заключающееся в том, что оператор не знал о необходимости отключения насосов или отказал расходомер или произошло то, что одновременно отказали расходомер и датчик уровня, приведет к аварии.

$\varphi_3 = (A_5 \wedge (A_7 \vee A_8))$ - отказ расходомера и отсутствие реакции оператора на отказ САВД приведет к головному событию..

$\varphi_4 = (A_5 \wedge A_6) \vee A_1))$- событие – отказ средств выдачи сигналов или отключение САВД не повлечет аварийной ситуации.

$\varphi_5 = (A_1 \vee (A_7 \vee A_{12}))$- при отказе выключателя насоса сразу возникает авария.

$\varphi_6 = (A_2 \vee (A_6 \wedge A_5) \vee A_{12})$- при совокупности этих событий авария также наступает.

$\varphi_7 = (A_{12} \vee A_{13})$- здесь авария возникнет вследствие не осуществления команды на отключение.

В таблице представлены (посчитанные) для каждой пары высказываний расстояния в трехзначной логике с простейшим расстоянием.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
φ_1	0	0,247	0,222	0,111	0,148	0,136	0,037
φ_2	0,247	0	0,37	0,358	0,284	0,284	0,21
φ_3	0,222	0,37	0	0,259	0,333	0,358	0,259
φ_4	0,111	0,358	0,259	0	0,074	0,158	0,148
φ_5	0,148	0,284	0,333	0,074	0	0,049	0,074
φ_6	0,136	0,284	0,358	0,158	0,049	0	0,098
φ_7	0,037	0,21	0,259	0,148	0,074	0,098	0

Таблица 1. Расстояние между высказываниями

	2	3	4	5
φ_1	-	0,3703	0,2265	0,148
φ_2	-	0,5679	0,3574	0,2725
φ_3	-	0,59259	0,4453	0,325
φ_4	-	0,3518	0,2109	0,136
φ_5	-	0,166	0,07	0,036
φ_6	-	0,216	0,097	0,0512
φ_7	-	0,2777	0,15625	0,1

Таблица 2.

	2	3	4	5
φ_1	0,375	0,1481	0,078	0,04
φ_2	0625	0,3209	0,1289	0,067
φ_3	0,625	0,3703	0,2656	0,208
φ_4	0,375	0,111	0,046	0,016
φ_5	0,125	0,037	0,2656	0,208
φ_6	0,1875	0,037	0,0078	0,032
φ_7	0,25	0,1111	0,0625	0,04

Таблица 3.

В таблице 2 – $I_{S(\Sigma)}(\varphi) = \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0)|}{n^{|S(\sum)|}}$;

В таблице 3 – $I_{S(\Sigma)}(\varphi) = \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0)|}{n^{|S(\sum)|}} + 0,5\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{1}{n}})|}{n^{|S(\sum)|}}$; Результаты вычислений для больших n логики Лукасевича не приводим ввиду громозкости таблиц и небольшой разницы в ответах. Даже кластеризации этих формул по разным расстояниям дают один ответ. Аналогичное замечание справедливо и для специального расстояния в 5-значной логике для банка из 350 формул. На основе исследований подмножеств этого банка формул предложена гипотеза, что начиная с 5-значности и дальше расстояние на формулах практически не изменяется.

8 Заключение

В задачах и алгоритмах распознавания образов важным инструментом является возможность вычислять расстояния между изучаемыми объектами. Наличие подходящей геометрии (метрики) позволяет улучшать распознавание и кластеризацию [1, 21, 24] и тезисы. Нахождение нужной метрики для лучшей кластеризации – проблема в распознавании образов. Предложенные расстояния позволяют адаптивно подобрать нужные метрики и даже выбрать из них лучшую в конкретной задачи. При этом на знания экспертов можно смотреть как на дополнительные данные, позволяющие более адекватно вскрыть имеющиеся причинно-следственные связи между переменными задачи и построить решающую функцию.

Предложенные расстояния и меры недостоверности обладают полезными свойствами [1, 2, 9, 17, 23, 24, 25]. И поэтому могут быть использованы при создании БЗ, анализе, кластеризации знаний и их пополнении. Различные степени недостоверности высказываний и расстояния между ними позволят находить нужные метрики как для кластеризации знаний баз знаний [1, 22], так и в алгоритмах распознавании образов [1, 5, 6, 7, 8, 9], а также для согласований знаний экспертов. Введенные понятия могут применяться при построении логических решающих функций на основе согласованных экспертных высказываний. Наш подход дает возможность не согласовывать высказывания, а использовать различные расстояния (например, как выше или от экспертов), а затем получать для примений коллективные расстояния.

В настоящее время возрос интерес к построению решающих функций на основе анализа экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний нескольких экспертов, реализации процессов адаптации и согласования высказываний [1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. Если высказывания экспертов представлены в виде формул произвольной n-значной табулированной логики (например, как логика Лукасевича [4]), то полученные выше результаты применимы к ним. Предлагаемый подход расширяет и обобщает случаи $n = 2$, $n = 3$ и отличается от вероятностного подхода [10, 11, 12], поскольку в указанных работах отсутствуют таблицы истинности [3]. Промежуточные значения истинности формул можно также рассматривать как нечеткие (вероятностные) значения истинности или как значения ошибочности высказывания (по интерпретации Д. Скотта). Еще раз отметим, что приведенные доказательства проходят для любых n-значных табулированных логик как нечеткой логике по Заде и логике Балдвина для нечетких значений истинности. Это так поскольку в этом случае применимы предлагаемые модели.

Ясно, что различные высказывания экспертов (и с оответствующие им формулы) содержат различное количество информации, поэтому возникает вопрос о ранжировании высказываний экспертов. В исследуемом случае можно провести ранжирование по степени недостоверности, упорядочивая рассматриваемый ансамбль формул по этому параметру. Кроме того можно рассмотреть вопрос о совместности и/или противоречивости множества высказываний.

Список литературы

[1] Лбов Г.С., Старцева Н.Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. – Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 1999.

[2] Загоруйко Н. Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 1999.

[3] Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика – М.: Физматлит, 2011.

[4] Карпенко А.С. Логики Лукасевича и простые числа. – Москва: «Наука», 2000.

[5] Lbov G.S., Gerasimov M.K. Constructing of a Consensus of Several Experts Statements. In: Proc. of XII Int. Conf. "Knowledge-Dialogue-Solution", 2006. - P. 193–195.

[6] Lbov G.S., Gerasimov M.K. Interval Prediction Based on Experts' Statements. In: Proc. of XIII Int. Conf. "Knowledge-Dialogue-Solution", 2007. - Vol. 2. - P. 474–478.

[7] Lbov G.S., Gerasimov M.K. Determining of Distance Between Logical Statements in Forecasting Problems. In: Artificial Intelligence, 2'2004 [in Russian]. Institute of Artificial Intelligence, Ukraine.

[8] Vikent'ev A. Measure of Refutation and Metrics on Statements of Experts (Logical Formulas) in the Models for Some Theory. In: Int. Journal "Information Theories & Applications", 2007. - Vol. 14. - No.1. - P. 92–95.

[9] Викентьев А. А., Новиков Д.В. Расстояние и Информативность на формулах-высказываниях экспертов и мера опровержимости (информативности) высказываний экспертов на моделях 3-значной логики. ВЕСТНИК Карагандинского гос. университета, сер. Математическая., N 1(45), Караганда, 2007, с. 8 – 18.

[10] Смердов С.О., Витяев Е.Е. Синтез логики, вероятности и обучения: формализация предсказания. Сибирские Электронные Математические Известия. Т.6, Институт математики им.С.Л. Соболева СО РАН, 2009, с. 340–365.

[11] T. Lukasiewicz. Probabilistic logic programming with conditional constraints. ACM Transactions on Computational Logic (TOCL), 2(3), 2001. P. 264–312.

[12] G. Kern-Isberner and T. Lukasiewicz. Combining Probabilistic Logic Programming with the Power of Maximum Entropy. Artificial Intelligence, 157(1-2), August 2004, pp. 139–202.

[13] Yu. I. Zhuravlev An Algebraic Approach to Recognition or Classification Problems, Pattern Recognition and Image Analysis, 8(10), 59-100 (1988).

[14] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. - М.: Мир, 1977.

[15] G.S. Lbov Methods of Polytypic Experimental Data Processing, Nauka, Novosibirsc, 1981 [in Russian].

[16] Vikent'ev A. A., Lbov G. S. Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis, 1997. V. 7, N2. P. 175 – 183.

[17] Викентьев А. А. Мера опровержимости высказываний экспертов, расстояния в многозначной логике и процессы адаптации // XIV International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2008. Varna, Bulgaria, 2008. C. 179 – 188.

[18] Kabanova E. Distance between formulas of the five-valued Lukasiewicz logic and the uncertainty measure of expert statements // 6th International Workshop "Weighted Automata: Theory and Applications" WATA 2012. Dresden, Germany, 2012. P. 62 – 63.

[19] Кабанова Е. С. Расстояние между формулами пятизначной логики Лукасевича и мера недостоверности высказываний экспертов //

Материалы 50-й юбилейной МНСК «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск: изд-во НГУ, 2012.

[20] Кабанова Е. С. Применение расстояния между формулами конечнозначной логики Лукасевича и меры недостоверности высказываний в кластеризации // Материалы 50-й юбилейной МНСК «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск: изд-во НГУ, 2012.

[21] Миркин Б. Г. Методы кластер-анализа для поддержки принятия решений: обзор. М: Изд. Дом ВШЭ, 2011.

[22] Викентьев А. А., Кабанова Е. С. Расстояние между формулами пятизначной логики Лукасевича и мера недостоверности высказываний экспертов в кластеризации // Материалы международной научной конференции, посвящённой памяти и 70-летию проф. Т. Г. Мустафина, Караганда, 2012. С. 28 – 29.

[23] Викентьев А. А., Викентьев Р. А. Расстояния и меры недостоверности на высказываниях n-значной логики // Вестник НГУ, серия: математика, механика, информатика. Новосибирск: изд-во НГУ, 2011. Том 11, вып. 2. С. 51 – 64.

[24] Викентьев А. А., Кабанова Е. С. Расстояние между формулами пятизначной логики Лукасевича и мера недостоверности высказываний экспертов // Вестник КарГУ, серия: математика. Караганда: изд-во КарГУ, 2013. №1(69). С. 18–27.

[25] Викентьев А. А. О возможных расстояниях и степенях недостоверности в многозначных высказываниях экспертов и приложение этих понятий в проблемах кластеризации и распознавания // Проблемы информатики. Новосибирск: СО РАН, 2011. №3(11). С. 33 – 45.

НОВЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ МЕТРИКИ ДЛЯ ФОРМУЛ В N-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ И МЕРА НЕДОСТОВЕРНОСТИ В АЛГОРИТМАХ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

А. А. Викентьев, Р.А. Викентьев, Е.С. Кабанова*

Институт Математики им. Акад. С.Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга 4, г. Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет,
улица Пирогова 2, г. Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: vikent@math.nsc.ru,ruslan.vikentiev@gmail.com, iameye@mail.ru

1 Введение

Задача определения мер близости между знаниями была поставлена ещё Г. С. Лбовым и Н. Г. Загоруйко. Под знаниями подразумеваются краткие обобщённые описания информации, содержащихся в данных [3, 5].

В данной работе такими знаниями являются высказывания (экспертов), которые можно записать в виде формул конечнозначной логики Лукасевича.

Ранее, для случая многозначной логики были введены расстояние и мера опровержимости, которые были необходимы для изучения экспертной информации [3, 4, 6, 12, 14].

В работах [7, 8, 11, 13], аналогично случаю классической логики [3, 4], были введены следующие величины: новое расстояние между формулами пятизначной логики Лукасевича L_5 и мера недостоверности высказываний экспертов (равная расстоянию между соответствующей высказыванию формулы L_5 до тождественно истинной формулы). Также были определены и доказаны свойства этих величин, учитывающие семантику сходства и различия информации в этих высказываниях.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 11-07-00345а.

Для дальнейшего использования этих величин на практике необходимо обобщить их на случай n-значной логики L_n (для n$\geq$2), определить и доказать свойства, что является первой задачей данной работы. Свойства могут применяться в анализе баз знаний.

Одно из возможных применений расстояния и меры недостоверности — использование их в кластеризации конечных множеств высказываний, которые можно записать в виде логических формул. Таким образом, вторая задача данной работы — показать применение этих величин в кластеризации множеств формул с учётом особенностей многозначной логики. Ранее кластеризация множеств логических формул (а, тем более, многозначных) не использовалась.

Также необходимо проанализировать результаты адаптированных к логическим формулам алгоритмов кластеризации при различных n.

2 Конечнозначная логика L_n

Определение 2.1. Пропозициональный язык L:

1. x, y, z,... — формулы;
2. $\neg$, $\rightarrow$ — пропозициональные связки (отрицание и импликация);
3. (,) — вспомогательные символы.

Определение 2.2. Формула:

1. x, y, z,... — формулы;
2. если φ и ψ — формулы, то $\neg\varphi$ и $\varphi\rightarrow\psi$ — тоже формулы;
3. никакие другие конечные последовательности из исходных символов, кроме построенных в силу пунктов 1 – 2, формулами не являются.

Например, n-значная матричная логика Лукасевича L_n определяется логической матрицей $M_n =< V_n, \neg, \rightarrow, \{1\} >$, где $V_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, ..., \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ — множество значений истинности; $\neg$, $\rightarrow$ — унарная операция отрицания и бинарная операция импликации соответственно, определённые на множестве V_n; $\{1\}$ — выделенное значение истины.

Логические операции на множестве V_n определяются следующим образом:

$\neg x = 1 - x$; (отрицание)

$x \to y = \min\{1, 1 - x + y\}$. (импликация)

Через эти операции выражаются другие:

$x \vee y = (x \to y) \to y = \max\{x, y\}$; (дизъюнкция)

$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) = \min\{x, y\}$. (конъюнкция) [2]

3 Основные определения и обозначения

Σ — конечное множество формул L_n.

$S(\varphi)$ — множество переменных, используемых при написании формулы φ логики L_n (носитель формулы $\varphi \in \Sigma$).

$S(\Sigma) = \bigcup_{\varphi \in \Sigma} S(\varphi)$ — множество переменных, участвующих в написании всех формул из Σ (носитель множества Σ).

Запись $\varphi_{\frac{k}{n-1}}$ означает, что формула φ принимает на модели значение $\frac{k}{n-1}, k = 0, ..., n-1$.

<u>Определение 3.1.</u>

Назовём моделью M кортеж из означенных переменных и значение формулы при данном означивании.

M не содержит одновременно $\varphi_{\frac{k}{n-1}}$ и $\varphi_{\frac{l}{n-1}}$, для любого $k \neq l$. Обозначим множество всех моделей как $P(S(\Sigma))$. Ясно, что $|P(S(\Sigma))| = n^{|S(\Sigma)|}$ [6].

Впервые использование теории моделей и модели для определения расстояния между логическими формулами предложил первый автор [3, 4, 6, 12, 14].

В работе [6] определены свойства моделей и другие связанные определения.

<u>Определение 3.2.</u>

Назовём формулы φ и ψ эквивалентными (φ ? ψ), если они имеют одно и то же множество моделей в каждом значении истинности [3, 4, 6].

В дальнейшем для краткости будем пользоваться следующими обозначениями:

$M(\varphi_{\frac{k}{n-1}})$ — количество моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$.

$M(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1})$ — количество моделей, на которых φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$, а ψ $\frac{l}{n-1}$.

4 Расстояние между формулами L_n

В данном разделе результаты для случая пятизначной логики [7, 8, 11, 13] обобщены на n-значный случай. В определении расстояния мы учитываем разницу между значениями двух формул на каждой модели, тем самым полным образом используется многозначность формул.

Естественно предположить, что чем меньше модуль разности между значениями φ и ψ, тем формулы более близки в данной модели. Следовательно, умножим количество моделей с одинаковыми модулями разности на коэффициент, учитывающий близость значений формул. В качестве таких коэффициентов возьмём n истинностных значений для L_n:

$$\tilde{\rho}(\varphi,\psi) = 0\cdot\left(M(0,0)+M(\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1})+M(\frac{2}{n-1},\frac{2}{n-1})+\dots+\right.$$
$$\left.+M(\frac{n-2}{n-1},\frac{n-2}{n-1})+M(1,1)\right)+\frac{1}{n-1}\cdot\left(M(0,\frac{1}{n-1})+M(\frac{1}{n-1},0)+\right.$$
$$\left.+M(\frac{1}{n-1},\frac{2}{n-1})+\dots+M(\frac{n-2}{n-1},1)+M(1,\frac{n-2}{n-1})\right)+\dots$$
$$+\frac{n-2}{n-1}\cdot\left(M(0,\frac{n-2}{n-1})+M(\frac{n-2}{n-1},0)+M(\frac{1}{n-1},1)+M(1,\frac{1}{n-1})\right)+$$
$$+1\cdot(M(0,1)+M(1,0)) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{|k-l|}{n-1}\cdot M(\frac{k}{n-1},\frac{l}{n-1}).$$

Остаётся только нормировать величину $\tilde{\rho}$.

Определение 4.1.

«Расстоянием» между формулами φ и ψ n-значной логики L_n при $S(\varphi)\bigcup S(\psi)\subseteq S(\Sigma)$на множестве $P(S(\Sigma))$назовём величину:

$$\rho(\varphi,\psi) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{|k-l|}{n-1}\cdot M(\frac{k}{n-1},\frac{l}{n-1}) \qquad (1)$$

Следующая теорема показывает, что величина, определённая равенством (1), действительно является расстоянием.

Теорема 1:

«Расстояние» между двумя формулами L_n, определённое равенством (1), для любых $\varphi,\psi,\chi\in\Sigma$ удовлетворяет следующим свойствам:

1. $0\le\rho(\varphi,\psi)\le 1$;
2. $\rho(\varphi,\psi)=0\Leftrightarrow\varphi\equiv\psi$;

3. $\rho(\varphi, \psi) = \rho(\psi, \varphi)$;
4. $\rho(\varphi, \psi) \leq \rho(\varphi, \chi) + \rho(\chi, \psi)$;
5. $\varphi \equiv \varphi_1, \psi \equiv \psi_1 \Rightarrow \rho(\varphi, \psi) = \rho(\varphi_1, \psi_1)$;
6. $\rho(\varphi, \psi) = \rho(\neg\varphi, \neg\psi)$;
7. $\rho((\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi)) = \rho(\varphi, \psi)$
8. $\rho(\varphi, \psi) = \rho(\varphi \to \psi, \psi \to \varphi)$.

Доказательство аналогично доказательству этой теоремы для случая пятизначной логики [13] с использованием методов цитируемых работ.

Примеры: В случае пятизначной логики $\rho(x \wedge y, x \vee y) = 0.4$, $\rho(x \wedge y \wedge z \wedge w, x \to w) = 0.2576$.

Замечание 1:

Свойства 2) – 4) — это свойства метрики. Таким образом, мы получили метрическое пространство на классах эквивалентных формул – высказываний.

Замечание 2:

Без ограничения общности можно считать, что формулы φ и ψ — это формулы от одного числа переменных, некоторые переменные в которых принимают константные значения.

Обобщения введенного расстояния между формулами L_n

Расстояние, заданное формулой (1) это расстояние для случая, когда все значения всех переменных заранее не известны. Теперь рассмотрим случай, когда известны конкретные истинностные значения некоторых переменных (например, x1 = 0, или x1 точно не равно 1 и $\frac{n-2}{n-1}$). В работах [7, 8] определено такое расстояние для случая пятизначной логики Лукасевича. Обобщим его на n-значный случай.

Пусть переменные $x_1, ..., x_p$, $x_i \in S(\varphi) \bigcup S(\psi)$, $i = 1, ..., p$, $p = |S(\varphi) \bigcup S(\psi)|$ соответственно принимают $m_1, ..., m_p$, $m_i \leq n$ истинностных значений. Тогда формула для нахождения расстояния между формулами φ и ψ выглядит следующим образом:

$$\rho'(\varphi, \psi) = \frac{1}{m_1 \cdot \ldots \cdot m_p} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{|k-l|}{n-1} \cdot M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right). \qquad (2)$$

В данном случае при расчёте расстояния рассматриваются не все модели, а подмножество из $m_1 \cdot \ldots \cdot m_p$ моделей. Сам расчёт производится по тому же принципу.

Формула (1) является частным случаем (2), если $m_1 = ... = m_p = n$.

Для ρ'справедлива Теорема 1 с заменой ρ на ρ'. Доказательство аналогично.

Если все $m_1 \cdot ... \cdot m_p$ моделей занумеровать, то формулу (2) можно переписать в виде:

$\rho'(\varphi, \psi) = \frac{1}{m_1 \cdot ... \cdot m_p} \cdot \sum_{i=1}^{m_1 \cdot ... \cdot m_p} |M_i(\varphi) - M_i(\psi)|,$ (3)

где $M_i(\varphi)$ значение формулы φ на модели M_i, $i = 1, ..., m_1 \cdot ... \cdot m_p$.

Пример: Пусть $\varphi = (x \to y) \vee z$, $\psi = (x \wedge y) \to z$ — формулы трёхзначной логики Лукасевича. И пусть переменные, входящие в эти формулы принимают следующие значения: $x \in \{\frac{1}{2}, 1\}$, $y \in \{1\}$, $z \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Тогда $\rho'(\varphi, \psi) = 0,3333$ (при этом, $\rho(\varphi, \psi) = 0,2037$).

5 Мера недостоверности высказываний

В классической логике под информативностью высказывания подразумевается относительное число моделей, на которых данное высказывание эксперта ложно, или, что то же самое, нормированное расстояние от высказывания до тождественно истинной формулы. Чем больше моделей, на которых высказывание не истинно, тем оно менее достоверно. Понятие работает в случае выполнимой формулы, те имеющей хотя бы одну модель со значением истинности близкое к 1.

Обобщая хорошо изученный случай пятизначной логики [7, 8, 11, 13], зададим меру недостоверности для случая n-значной логики L_n.

<u>Определение 5.1.</u>

Мера недостоверности I(φ) для формул n-значной логики L_n, при $S(\varphi) \subseteq S(\Sigma)$, на множестве $P(S(\Sigma))$ задаётся равенством:

$I(\varphi) = \rho(\varphi, 1) = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n-1-i}{n-1} \cdot \frac{M(\varphi_{\frac{i}{n-1}})}{n^{|S(\Sigma)|}}$ (4)

<u>*Теорема 2:*</u>

Мера недостоверности, определённая равенством (4), для любых формул $\varphi, \psi, \chi \in \Sigma$ удовлетворяет следующим свойствам:

1. $0 \leq I(\varphi) \leq 1$;
2. $I(\varphi) + I(\neg\varphi) = 1$;
3. $I(\varphi \wedge \psi) \geq \max\{I(\varphi), I(\psi)\}$;
4. $I(\varphi \vee \psi) \leq \min\{I(\varphi), I(\psi)\}$;
5. $I(\varphi \vee \psi) + I(\varphi \wedge \psi) \geq I(\varphi) + I(\psi)$;

6. $I(\varphi \wedge \psi) = \rho(\varphi, \psi) + I(\varphi \vee \psi)$;
7. $\rho(\varphi, \psi) \leq I(\varphi) + I(\psi)$;
8. $I(\varphi) \geq \rho(\varphi \to \psi, \psi)$;
9. $I(\varphi \to \psi) \leq \rho(\varphi, \psi)$;
10. $I(\varphi \vee \psi) \leq \rho(\varphi \to \psi, \varphi \wedge \psi)$.

Меру недостоверности можно использовать при анализе множеств высказываний следующим образом: если мера недостоверности высказывания близка к $\frac{1}{2}$, то это высказывание можно в дальнейшем не учитывать, так как оно не несёт определённой информации (не близко как к нулю, так и к тождественно истинной формуле).

6 Кластеризация множеств высказываний

Кластеризация - это разбиение исходного множества объектов на подмножества (кластеры), при котором каждый объект может быть отнесен к одному или нескольким заранее неизвестным классам. Внутри каждого кластера должны оказаться схожие объекты, а объекты разных кластеров должны как можно больше отличаться.

Так как для таких множеств известны только расстояния между формулами и расстояния от каждой формулы до тождественно истинной, были выбраны два общеизвестных алгоритма кластеризации, в которых расстояние имеет важное значение, и адаптированы в данной работе для кластеризации конечных множеств логических формул.

5.1. Иерархический алгоритм

Пусть есть множество объектов I. Кластеризация происходит либо путём агломерации (объединения более мелких кластеров в более крупные), либо путём разделения крупных кластеров на более мелкие. В результате получается следующая структура: совокупность H вложенных подмножеств S (кластеров), удовлетворяющих свойству: при любых S_1 и S_2 из H их пересечение $S_1 \bigcap S_2$ либо пусто, либо совпадает с одним из них [10].

Графически такая структура представляется в виде дендрограммы.

Иерархический алгоритм для кластеризации множества формул L_n

Сначала задаём конечное множество формул n-значной логики Лукасевича.

Перед началом работы алгоритма задаём величину delta — максимальную разницу между мерами недостоверности элементов одного кластера. Это является критерием остановки.

Строим матрицу расстояний для заданного конечного множества формул (для построения используем расстояние).

Итерация:

Шаг 1. Ищем формулы, между которыми — наименьшее расстояние, и объединяем их в один кластер.

Если таких формул >2, то:

Случай 1. $\rho(\varphi,\psi) = \rho(\varphi,\chi) = \rho_{\min}$. Тогда объединяем φ,ψ,χ в один кластер.

Случай 2. $\rho(\varphi_1,\varphi_2) = \rho(\varphi_3,\varphi_4) = \rho_{\min}$. Тогда объединяем φ_1,φ_2 в один кластер, а φ_3,φ_4 — в другой.

Шаг 2. Далее, объединяем кластеры по одному из методов. В данном случае, по методу ближайшего соседа. Пересчитываем матрицу по следующему правилу:

$$\rho(\varphi_k,\varphi_{ij}) = \min\{\rho(\varphi_k,\varphi_i), \rho(\varphi_k,\varphi_j)\}.$$

Итерации продолжаются, пока не выполнится критерий остановки (то есть, пока величина delta не достигнет заданного значения).

Пример:

Рассмотрим множество из восьми формул пятизначной логики Лукасевича.

$\varphi_1 = x \to y; \varphi_2 = \neg(x \to y); \varphi_3 = (x \vee z) \to y; \varphi_4 = \neg((x \wedge y) \vee z) \to w;$ $\varphi_5 = y \to (x \wedge z); \varphi_6 = (\neg y \vee (x \to z)) \to w; \varphi_7 = ((x \to y) \to z) \to w; \varphi_8 = (w \to z) \wedge (y \to x).$

Их меры недостоверности соответственно равны:

$I(\varphi 1) = 0{,}2000$; $I(\varphi 2) = 0{,}8000$; $I(\varphi 3) = 0{,}3000$; $I(\varphi 4) = 0{,}3584$;

$I(\varphi 5) = 0{,}3000$; $I(\varphi 6) = 0{,}4092$; $I(\varphi 7) = 0{,}2716$; $I(\varphi 8) = 0{,}3416$.

Строим матрицу расстояний (см. Таблица 1), используя расстояние (1).

Таблица 1. Матрица расстояний

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	0	0,7600	0,1000	0,3416	0,4560	0,3876	0,2500	0,4248
2		0	0,6840	0,5472	0,5000	0,5004	0,6420	0,5032
3			0	0,3248	0,5120	0,3660	0,2460	0,4712
4				0	0,4032	0,0508	0,1300	0,4424
5					0	0,4212	0,4276	0,1416
6						0	0,1688	0,4628
7							0	0,4756
8								0

Наименьшее расстояние = 0,0508, между формулами φ_4 и φ_6. Объединяем их в кластер φ_{46}, и далее, действуем по алгоритму выше.

Итерация 1: $\min\limits_{i \neq j} \rho(\varphi_i, \varphi_j) = 0,0508 = \rho(\varphi_4, \varphi_6)$. Кластеры: φ_1, φ_2, φ_3, φ_{46}, φ_5, φ_7, φ_8, δ=0,0508.

Итерация 2: $\min\limits_{i \neq j} \rho(\varphi_i, \varphi_j) = 0,1000 = \rho(\varphi_1, \varphi_3)$. Кластеры: φ_{13}, φ_2, φ_{46}, φ_5, φ_7, φ_8, δ =0,1000.

Итерация 3: $\min\limits_{i \neq j} \rho(\varphi_i, \varphi_j) = 0,1300 = \rho(\varphi_7, \varphi_{46})$. Кластеры: φ_{13}, φ_2, φ_{467}, φ_5, φ_8. δ =0,1376.

Итерация 4: $\min\limits_{i \neq j} \rho(\varphi_i, \varphi_j) = 0,1416 = \rho(\varphi_5, \varphi_8)$. Кластеры: φ_{13}, φ_2, φ_{467}, φ_{58}, δ=0,1376.

Итерация 5: $\min\limits_{i \neq j} \rho(\varphi_i, \varphi_j) = 0,2460 = \rho(\varphi_{13}, \varphi_{467})$. Кластеры: φ_2, φ_{58}, φ_{13467}, δ =0,2092.

Итерация 6: $\min\limits_{i \neq j} \rho(\varphi_i, \varphi_j) = 0,4032 = \rho(\varphi_{58}, \varphi_{13467})$. Кластеры: φ_2, $\varphi_{1345678}$, δ=0,2092.

Итерация 7: $\rho(\varphi_2, \varphi_{1345678}) = 0,5000$. Кластер $\varphi_{12345678}$, δ =0,6000.

Если перед началом работы алгоритма задаём δ, равную, например, 0,1500, то алгоритм останавливается после четвёртой итерации и выдаёт результат:

Кластер 1: $\varphi 1$, φ_3. Кластер 2: φ_2. Кластер 3: φ_4, φ_6, φ_7. Кластер 4: φ_5, φ_8.

5.2. Алгоритм к-средних (k-means)

Пусть имеется множество объектов I. Сначала каким-либо образом выбираются K начальных точек (центров). Затем осуществляется последовательность итераций, каждая из которых состоит их двух шагов:

1. Обновление кластеров. При заданных K центрах C_k, $k = (1, 2, .., K)$ каждый объект $i \in I$ приписывается к ближайшему из центров C_k. Таким образом, образуются кластеры S_k, $k = (1, 2, .., K)$.

2. Обновление центров. Для каждого кластера S_k вычисляется его

центр тяжести (внутрикластерное среднее), который объявляется новым центром C'_k.

Процесс останавливается, когда кластеры на шаге t совпадут с кластерами на шаге $t-1$ [10].

Алгоритм к-средних для кластеризации множества формул L_n

Рассмотрим конечное множество логических формул L_n.

Центрами будут являться некоторые K формул из данного множества. Сначала определяемся с количеством кластеров, затем подбираем центры кластеров, анализируя матрицу расстояний. Для простоты, будем считать следующее:

— центры должны быть примерно равноудалены друг от друга;

— расстояния между кластерами должны быть максимально возможными, с учётом предыдущего пункта.

Итерация:

Шаг 1. Приписываем каждую формулу из множества к ближайшему центру.

Шаг 2. Центр масс — это столбец значений логики L_n. Для определения этого столбца учитывается специфика многозначных логических формул:

Вычисляется среднее арифметическое S_a значений элементов одного кластера на каждой модели.

Если S_a принадлежит множеству логических значений $V_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, то оно записывается в столбец значений.

Если $S_a \notin V_n$, то в столбец значений записывается ближайшее снизу (или ближайшее сверху, это определяется до начала работы алгоритма) значение из V_n (чтобы оставаться в том же множестве моделей, то есть, в той же логике L_n).

Итерации продолжаются, пока кластеры не останутся такими же, как на предыдущей итерации.

Пример:

Рассмотрим множество из восьми формул из предыдущего примера. Допустим, нам нужно получить три кластера. Анализируя матрицу расстояний, выбираем центрами формулы φ_2,φ_4,φ_5. ($\rho(\varphi_2, \varphi_4) = 0,5472$, $\rho(\varphi_2, \varphi_5) = 0,5000$, $\rho(\varphi_4, \varphi_5) = 0,4032$).

Распределяем оставшиеся формулы по центрам. Получаются кластеры:

$$\varphi_2; \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7; \varphi_5, \varphi_8.$$

Ищем центры масс. Рассмотрим наглядно, как это происходит.

Таблица 2. Определение центра масс кластера

x	**y**	**z**	**w**	φ_5	φ_8	C_{58}
0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	C_1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	C_2
...						

$C_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)/2 = \frac{1}{2} \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$,
$C_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)/2 = \frac{5}{8} \notin \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$.

Допустим, в качестве значения мы определились брать ближайшее сверху значение. Тогда $C_2 = \frac{3}{4}$. Остальное — аналогично. Таким образом, мы вычисляем центры тяжести кластеров.

Снова распределяем формулы по обновлённым центрам. Получаются следующие кластеры:

$$\varphi_2; \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7; \varphi_5, \varphi_8.$$

Кластеры не изменились. Следовательно, алгоритм останавливается и выдаёт получившиеся кластеры в качестве результата.

Заметим, что при таком начальном выборе центров получившиеся кластеры совпадают с кластерами на пятой итерации иерархического алгоритма.

7 Примеры

Был создан банк из 250 различных логических формул, откуда случайным образом выбирались подмножества формул. С помощью адаптированных алгоритмов, описанных в предыдущем разделе, было кластеризовано более 30 таких подмножеств (от 8 до 30 формул в каждом подмножестве) при различных n, где n — это значность логики L_n. Для данных вычислений расстояние (1) и адаптированные алгоритмы кластеризации были программно реализованы. Сложность вычисления расстояния — экспоненциальная.

Ниже представлены типичные примеры множеств формул, в процессе кластеризации которых образуются несколько неодноэлементных кластеров.

1. $\neg((x \wedge y \wedge z) \to w)$
2. $\neg((x \wedge y \wedge z) \to (x \vee w))$

3. $z \to (w \to (x \vee y))$
4. $w \to (x \to (y \vee z))$
5. $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge w)$
6. $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee w)$
7. $((x \wedge y) \to (y \vee z)) \to (x \vee y)$
8. $((y \wedge z) \to (x \wedge y)) \to (x \vee y)$
9. $((x \vee y) \to (y \vee z)) \to (x \wedge y)$
10. $z \to (w \to (x \to y))$

Иерархический алгоритм

Показаны итерации алгоритма при различных n для логики Лукасевича. Значение δ заранее не задано.

n=2
1: {1}; {2}; {3}; {4}; {5}; {6}; {7}; {8}; {9}; {10} $\delta = 0{,}00000$
2: {1}; {2}; {3}; {4}; {5}; {6}; {7, 8}; {9}; {10} $\delta = 0{,}00000$
3: {1}; {2}; {3, 4, 10}; {5}; {6}; {7, 8}; {9} $\delta = 0{,}00000$
4: {1, 2, 3, 4, 7, 8, 10}; {5}; {6}; {9} $\delta = 0{,}37500$
5: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10}; {9} $\delta = 0{,}43750$
6: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} $\delta = 0{,}56250$
n=3
1: {1}; {2}; {3}; {4}; {5}; {6}; {7}; {8}; {9}; {10} $\delta = 0{,}00000$
2: {1}; {2}; {3}; {4}; {5}; {6}; {7, 8}; {9}; {10} $\delta = 0{,}01852$
3: {1}; {2}; {3, 4, 10}; {5}; {6}; {7, 8}; {9} $\delta = 0{,}01852$
4: {1, 2}; {3, 4, 10}; {5}; {6}; {7, 8}; {9} $\delta = 0{,}16667$
5: {1, 2}; {3, 4, 10}; {5, 6}; {7, 8}; {9} $\delta = 0{,}16667$
6: {1, 2}; {3, 4, 7, 8, 10}; {5, 6}; {9} $\delta = 0{,}22222$
7: {1, 2, 3, 4, 7, 8, 10}; {5, 6}; {9} $\delta = 0{,}35802$
8: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10}; {9} $\delta = 0{,}46296$
9: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} $\delta = 0{,}57407$
n=4
1: {1}; {2}; {3}; {4}; {5}; {6}; {7}; {8}; {9}; {10} $\delta = 0{,}00000$
2: {1}; {2}; {3}; {4, 10}; {5}; {6}; {7}; {8}; {9} $\delta = 0{,}00781$
3: {1}; {2}; {3, 4, 10}; {5}; {6}; {7}; {8}; {9} $\delta = 0{,}00781$
4: {1}; {2}; {3, 4, 10}; {5}; {6}; {7, 8}; {9} $\delta = 0{,}01562$
5: {1, 2}; {3, 4, 10}; {5}; {6}; {7, 8}; {9} $\delta = 0{,}15104$
6: {1, 2}; {3, 4, 10}; {5, 6}; {7, 8}; {9} $\delta = 0{,}15104$

7: $\{1, 2, 7, 8\}$; $\{3, 4, 10\}$; $\{5, 6\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}15104$
8: $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 10\}$; $\{5, 6\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}34505$
9: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}47266$
10: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $\delta = 0{,}57682$

n=5

1: $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$; $\{5\}$; $\{6\}$; $\{7\}$; $\{8\}$; $\{9\}$; $\{10\}$ $\delta = 0{,}00000$
2: $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3, 4, 10\}$; $\{5\}$; $\{6\}$; $\{7\}$; $\{8\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}00840$
3: $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3, 4, 10\}$; $\{5\}$; $\{6\}$; $\{7, 8\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}01600$
4: $\{1, 2\}$; $\{3, 4, 10\}$; $\{5\}$; $\{6\}$; $\{7, 8\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}14600$
5: $\{1, 2\}$; $\{3, 4, 10\}$; $\{5, 6\}$; $\{7, 8\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}14600$
6: $\{1, 2, 7, 8\}$; $\{3, 4, 10\}$; $\{5, 6\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}14600$
7: $\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$; $\{3, 4, 10\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}28760$
8: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}47760$
9: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $\delta = 0{,}57760$

n=6

1: $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$; $\{5\}$; $\{6\}$; $\{7\}$; $\{8\}$; $\{9\}$; $\{10\}$ $\delta = 0{,}00000$
2: $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4, 10\}$; $\{5\}$; $\{6\}$; $\{7\}$; $\{8\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}00864$
3: $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3, 4, 10\}$; $\{5\}$; $\{6\}$; $\{7\}$; $\{8\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}00864$
4: $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3, 4, 10\}$; $\{5\}$; $\{6\}$; $\{7, 8\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}01481$
5: $\{1, 2\}$; $\{3, 4, 10\}$; $\{5\}$; $\{6\}$; $\{7, 8\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}14028$
6: $\{1, 2\}$; $\{3, 4, 10\}$; $\{5, 6\}$; $\{7, 8\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}14028$
7: $\{1, 2, 7, 8\}$; $\{3, 4, 10\}$; $\{5, 6\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}14028$
8: $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 10\}$; $\{5, 6\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}32948$
9: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$; $\{9\}$ $\delta = 0{,}48056$
10: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $\delta = 0{,}57778$

При n=6 и далее — состав кластеров на каждой итерации совпадает. Меняется только δ.

Алгоритм к-средних

Центры — формулы 1, 3, 9. Для определения центра масс рассматриваем как ближайшее снизу, так и ближайшее сверху значение из множества логических значений.

n=2

Ближайшее снизу: итераций 2; кластеры: $\{1, 2, 5, 6\}$, $\{3, 4, 7, 8, 10\}$, $\{9\}$; $\delta = 0{,}25000$.

Ближайшее сверху: итераций 2; кластеры: $\{1, 2, 5, 6\}$, $\{3, 4, 7, 8, 10\}$, $\{9\}$; $\delta = 0{,}25000$.

При n=3 и далее состав кластеров остаётся таким же, как при n=2. Меняется только δ.

1. $\neg(z \wedge (y > x))$

2. $(x \to y) \to (y \to x)$
3. $\neg(y \vee z)$
4. $(x \to z) \to (z \to y) \to (y \to x)$
5. $y \to (x \vee z)$
6. $y \to (x \wedge z)$
7. $(x \to y) \wedge (x \vee y \vee z)$
8. $(y \vee z) \to (x \wedge y \wedge z \wedge w)$
9. $\neg((x \to y) \to z)$
10. $\neg(z \to (w \to (x \vee y)))$
11. $\neg(y \to (z \to (w \to x)))$
12. $\neg(x \wedge (y \vee z))$
13. $\neg(y \to (x \vee z))$
14. $(x \to (y \wedge z)) \vee (x \to z)$
15. $\neg((x \to z) \to y)$

Иерархический алгоритм

Пусть задана δ=0,5; значность логики n=7. Тогда алгоритм останавливается на десятой итерации и выдаёт кластеры:

{1, 12}; {2, 4, 5, 6, 9, 14, 15}; {3, 8}; {7}; {10, 11}; {13}; δ = 0,22449.

На следующей итерации δ равна уже 0,62925.

Алгоритм к-средних

Исходя из результатов кластеризации с помощью иерархического алгоритма, подбираем центры будущих кластеров: 1, 5, 7, 10.

n=2

Ближайшее снизу: итераций 2; кластеры: {1, 12, 13}, {2, 4, 5, 6, 9, 14, 15}, {7}, {3, 8, 10, 11}.

Ближайшее сверху: итераций 2; кластеры: 1, 12, 13}, {2, 4, 5, 6, 9, 14, 15}, {7}, {3, 8, 10, 11}.

n=3

Ближайшее снизу: итераций 2; кластеры: {1, 8, 12, 13}, {2, 4, 5, 6, 9, 14, 15}, {7}, {3, 10, 11}.

Ближайшее сверху: итераций 2; кластеры: {1, 8, 12, 13}, {2, 4, 5, 6, 9, 14, 15}, {7}, {3, 10, 11}.

n=4

Ближайшее снизу: итераций 2; кластеры: {1, 3, 8, 12, 13}, {2, 4, 5, 6, 9, 14, 15}, {7}, {10, 11}.

Ближайшее сверху: итераций 2; кластеры: {1, 3, 8, 12, 13}, {2, 4, 5, 6, 9, 14, 15}, {7}, {10, 11}.

При n=5 и далее состав кластеров и количество итераций такое же, как при n=4.

8 Наблюдения и выводы для различных n, n≥2

Исходя из рассмотренных примеров, были сделаны следующие выводы:

1. Для n = 2,. . . ,6 наблюдается разница в составе кластеров. Начиная с n = 7 кластеры и последовательность итераций для обоих алгоритмов не меняются (7 — это максимальное такое значение n для множества рассмотренных примеров. Для некоторых множеств формул состав кластеров не меняется после n = 4, для некоторых — после n = 5. и т. д.).

Таким образом, возникает гипотеза о нецелесообразности использования логики большой значности в реальных задачах. Частично это подтверждается самой конструкцией введённого в данной работе расстояния.

2. Для алгоритма к-средних при вычислении центров масс наблюдаются одни и те же результаты как при замене среднего арифметического ближайшим сверху значением из Vn , так и ближайшим снизу.

9 Заключение

Расстояние между логическими формулами и мера недостоверности высказываний обобщены на случай n-значной логики, в полной мере учитывая многозначность; доказаны свойства этих величин, схожие со свойствами расстояния и меры как в случае классической логики, так и в случае пятизначной. Помимо этого, определены и доказаны новые свойства, включающие в себя операцию импликации, что является очень важным для анализа реальных высказываний, так как такие высказывания часто имеют вид «если. . . , то. . . » или «. . . следует. . . ».

Также определён общий случай расстояния между логическими формулами, когда некоторые значения переменных заранее известны, что также является актуальным для реальных задач, когда некоторая информация уже задана.

Для кластеризации множеств многозначных высказываний адаптированы два алгоритма кластеризации — иерархический и к-средних (k-means). В обоих случаях используется расстояние между формулами и учитывается специфика формул конечнозначной логики Лукасевича. Результаты работы алгоритмов были исследованы на примерах при различных n.

В дальнейшем планируется анализ результатов кластеризации множеств, состоящих из большего, чем тридцать, количества формул, формализация этих результатов. Также планируется применение свойств расстояния и меры недостоверности при анализе множеств высказываний экспертов.

Литература

1. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика (2-е изд.) М.: Наука, 1987. 336 с.

2. Карпенко А. С. Логики Лукасевича и простые числа. М.: Наука, 2000. 319с.

3. Лбов Г. С., Старцева Н. Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск: Из-во ин-та математики, 1999. 212 с.

4. Vikent'ev A. A., Lbov G. S. Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis, 1997. V. 7, N2. P. 175 – 183.

5. Загоруйко Н. Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 1999. 270 с.

6. Викентьев А. А. Мера опровержимости высказываний экспертов, расстояния в многозначной логике и процессы адаптации // XIV International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2008. Varna, Bulgaria, 2008. C. 179 – 188.

7. Kabanova E. Distance between formulas of the five-valued Lukasiewicz logic and the uncertainty measure of expert statements // 6th International Workshop "Weighted Automata: Theory and Applications" WATA 2012. Dresden, Germany, 2012. P. 62 – 63.

8. Кабанова Е. С. Расстояние между формулами пятизначной логики Лукасевича и мера недостоверности высказываний экспертов // Материалы 50-й юбилейной МНСК «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск: изд-во НГУ, 2012.

9. Кабанова Е. С. Применение расстояния между формулами конечнозначной логики Лукасевича и меры недостоверности высказываний в кластеризации // Материалы 50-й юбилейной МНСК «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск: изд-во НГУ, 2012.

10. Миркин Б. Г. Методы кластер-анализа для поддержки принятия решений: обзор. М: Изд. Дом ВШЭ, 2011. 88 с.

11. Викентьев А. А., Кабанова Е. С. Расстояние между формулами пятизначной логики Лукасевича и мера недостоверности высказываний экспертов в кластеризации // Материалы международной научной конференции, посвящённой памяти и 70-летию проф. Т. Г. Мустафина, Караганда, 2012. С. 28 – 29.

12. Викентьев А. А., Викентьев Р. А. Расстояния и меры недостоверности на высказываниях n-значной логики // Вестник НГУ, серия: математика, механика, информатика. Новосибирск: изд-во НГУ, 2011. Том 11, вып. 2. С. 51 – 64.

13. Викентьев А. А., Кабанова Е. С. Расстояние между формулами пятизначной логики Лукасевича и мера недостоверности высказываний экспертов // Вестник КарГУ, серия: математика. Караганда: изд-во КарГУ, 2013. №1 (69) . С. 18-27.

14. Викентьев А. А. О возможных расстояниях и степенях недостоверности в многозначных высказываниях экспертов и приложение этих понятий в проблемах кластеризации и распознавания // Проблемы информатики. Новосибирск: СО РАН, 2011. №3 (11). С. 33 – 45.

СВЯЗЫВАНИЕ ТИПОВ КАК МЕТОД КОМБИНИРОВАНИЯ ЛОГИК

Д.Ю. Власов*

Институт математики СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова 2, г. Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: vlasov@academ.org

1 Проблема комбинирования логик

Помимо классической логики предикатов (высказываний) существует большое количество так называемых неклассических логик. Помимо рассмотрения этих логик изолированно друг от друга, можно ставить вопрос о некоторых операциях над этими логиками, что потенциально дает бесконечный спектр комбинаций логик.

Постановка задачи. Есть несколько логик: $L_1, L_2, \dots, L_n$. Как можно сконструировать логику L_0 из $L_1, L_2, \dots, L_n$?

Известно несколько способов комбинирования логик:

- сплав (fusion) модальных логик [1],
- сплетение (fibring) логик [2],
- E-связывания для логик описаний [3],
- графовые сплетения (graph-theoretic fibring) [4].

В данной статье будет предложен новый подход к комбинированию логик, базирующийся на связывании типов. Такая операция (связывание типов) возможна при особом способе представления дедуктивных систем, при котором явно описываются типы выражений, а также отношение общее-частное между этими типами. Этот способ представления

*Работа выполнена в НГУ при поддержке Сибирского Отделения РАН (Интеграционный проект 3), а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00460-а).

дедуктивных систем реализован в виде языка формальной математики Russell [5], разработанного автором. Краткий список характеристик этого языка (представления дедуктивных систем):

- Russell - это метаисчисление, позволяющее задавать широкий спектр различных дедуктивных систем, теорем и формальных доказательств в них,
- используются **контестно-свободные грамматики** для синтаксиса выражений,
- в Russell используется **система типов (сортов)**, как часть грамматики,
- в Russell имеется синтаксическая конструкция **определений**, которые реализуют консервативные расширения аксиоматики.

Исходные коды реализации языка Russell, а также формализованный фрагмент математики на базе теории множеств и исчисления предикатов и набор тестовых скриптов, доступны по ссылке `www.russellmath.org`

2 Система типов

Определение 1. *Система типов $\mathcal{T}$ это*

- *множество типов T,*
- *бинарное отношение $\prec$ на T.*

Как правило $\prec$ транзитивно и рефлексивно.

Типы из системы типов являются *в точности* нетерминальными символами грамматики. Пары типов из $\prec$ образуют цепные правила грамматики G_t:

$$t_1 \prec t_2 \ \text{ отображается в правило } \ t_2 \to t_1$$

Также, типы могут быть интерпретированы как *понятия* в описываемой дедуктивной системе. Это означает, что $\mathcal{T}$ образует *онтологию* рассматриваемой предметной области (дедуктивной системы).

Пример 1. *Сингулярная система типов для пропозициональной логики. Большинство пропозициональных логик имеют сингулярную систему типов, которая состоит из единственного типа (нетерминала)*

wff, означающего тип "правильно построенная формула" (well-formed formula). Грамматика пропозициональной логики со связками $\to, \wedge$ и $\neg$ в РБНФ нотации:

$$< wff > ::= \ \neg \ < wff > \ | \ (< wff > \to < wff >) \ | \ (< wff > \wedge < wff >)$$

Пример 2. *Система типов для исчисления предикатов. Имеет 3 типа: wff - тип для формул, $term$ - тип для термов и тип var для переменных. Грамматика логики предикатов для сигнатуры с одним двухместным предикатом p, одной двухместной функцией f и списком переменных $v_1, \dots, v_n$ в нотации РБНФ:*

$$< var > ::= \ v_1 \ | \ v_2 \ | \ \dots \ | \ v_n$$

$$< term > ::= < var >$$

$$< term > ::= \ f \ (< term > \ , \ < term > \ )$$

$$< wff > :: \ p \ (< term > \ , \ < term > \ )$$

$$< wff > ::= \ \neg \ < wff > \ | \ (< wff > \to < wff > \ )$$

$$< wff > ::= \ (< wff > \wedge < wff > \ ) \ | \ (< wff > \vee < wff > \ )$$

$$< wff > ::= \ \forall \ < var > < wff > \ | \ \exists \ < var > < wff >$$

В данном случае типы var и $term$ связаны отношением $\prec$:

$$var \prec term$$

Пример 3. *Система типов для теории множеств с классами. Расширяет систему типов для исчисления высказываний при помощи типа $class$ выражений - классов. Типы set и $class$ находятся в отношении $\prec$, а именно, $set \prec class$, таким образом, мы может подставлять термы типа set в переменные типа $class$, но не наоборот.*

Можно выделить три уровня абстракции при подобном описании дедуктивных систем

- *онтологический* = система типов (понятия и отношение $\prec$),
- *синтаксический* = правила грамматики,
- *содержательный* = аксиомы, определения и теоремы.

На онтологическом уровне (самом высоком уровне абстракции) выделяются только типы (понятия) и отношения общее-частное между ними. На втором уровне - уровне синтаксиса выражений - определяется язык, на котором излагается уже последний - содержательный уровень. При этом имеет место следующая цепочка отождествлений:
ТИП ПЕРЕМЕННОЙ = ЛОГИЧЕСКИЙ СОРТ = НЕТЕРМИНАЛ ГРАММАТИКИ = ПОНЯТИЕ

3 Связывание типов

Определение 2 (Связывание типов)**.** *Пусть $\mathcal{T}$ - это система типов. Для каждой пары $t, s \in T$ введем обозначение*

$$\mathcal{T}^{t \prec s} = (T, \prec \cup \{(t,s)\})$$

После связывания t с s посредством добавления пары (t,s), то есть введения $t \prec s$, мы разрешаем подставлять в переменные типа s выражения типа t. После связывания типов мы получаем следующий эффект:

- расширение множества правильно построенных выражений,
- расширение множества доказуемых утверждений,
- нецепные правила грамматики, аксиоматика и определения не меняются.

Связывание типа t с s в дедуктивной системе обозначим через $D^{t \prec s}$.

Определение 3 (Комбинация дедуктивных систем)**.** *Пусть D_1 и D_2 - две дедуктивные системы (с дизъюнктными системами типов), и $t \in T_1,\ s \in T_2$ - два типа. Тогда*

- *$D_1 \sqcup D_2$ - полностью независимая комбинация,*
- *$(D_1 \sqcup D_2)^{t \prec s}$ - комбинированная система, в которой есть взаимодействие частей посредством типов t и s*

Связывание типов может быть проитерировано.

Заметим, что операция связывания типов полностью прозрачна: связывание типов действует на наиболее абстрактном уровне - онтологическом (то есть на уровне системы типов. Оно не меняет ни правил грамматики, то есть синтаксического, ни аксиоматического, то есть содержательного уровня.

Для двух типов t_1 и t_2 мы можем связать их в обоих направлениях:

$$t_1 \prec t_2 \text{ и } t_2 \prec t_1$$

В таком случа мы будем писать $t_1 \equiv t_2$, и говорить, что t_1 и t_2 отождествлены. Действительно, $t_1 \equiv t_2$ означает, что нетерминалы t_1 и t_2 взаимозаменяемы в грамматике выражений, поэтому они могут рассматриваться как *один* тип.

Определение 4 (Общее определение связывания)**.** *Для данной системы типов $\mathcal{T}$, связывание типов B это множество пар типов:*

$$B \subset T \times T$$

Если $D_1, \ldots, D_k$ - две дедуктивные системы с системами типов $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$, $B = \{(t_1, s_1), \ldots, (t_m, s_m)\}$ - связывание типов на объединенной системе типов $\bigcup_{i \leq n} \mathcal{T}_i$, то мы можем определить комбинированную дедуктивную систему:

$$(D_1 \cup \ldots \cup D_n)^B = (\ldots((D_1 \cup \ldots \cup D_n)^{t_1 \prec s_1})^{t_2 \prec s_2})\ldots)^{t_m \prec s_m}$$

4 Семантика связывания типов

Поскольку *типы* - это в точности *сорта* в логической терминологии, то для семантики естественно рассматривать многосортные структуры, как, например, это делается в статье [6].

Определение 5 (Алгебраизация синтаксиса)**.** *Каждое нецепное правило грамматики $r = t \to w$ порождает алгебраическую операцию $*_r$ на множестве выражений данной дедуктивной системы:*

- *местность r - это количество нетерминальных символов, встречающихся в r,*
- *сорта аргументов r - это соответствующие нетерминалы,*
- *сорт значения - это t.*

Заметим, что, в силу многосортности, все операции $*_r$ будут всюду определены для переменных соотвествующих сортов. Для заданной дедуктивной системы D мы можем определить сигнатуру σ_D для алгебры выражений E_D этой системы, и работать с алгебрами данной сигнатуры.

Определение 6 (Логические сорта)**.** *Пусть D - дедуктивная система. Каждый сорт (тип) t, являющийся подтипом некоторого типа, который используется как тип выражения, использующегося в аксиоме или определении в D называется логическим.*

Пример 4 (Логика первого порядка)**.** *Есть три сорта:*

- *сорт переменных,*
- *сорт термов,*
- *сорт формул.*

Сорт формул - логический, в то время как сорта термов и переменных - нет.

В отличии от подхода, принятого в абстрактной алгебраической семантике логик [7], упростим ситуацию и будем считать, что для определения истинности тех или иных выражений логических типов у нас есть соответствующие логические константы.

Определение 7 (Синтаксическое определение истины)**.** *Пусть D - дедуктивная система. Мы говорим, что истина определена в D, если для каждого логического типа s есть константа $\top_s$ типа s и аксиома $\top_s$.*

Если в дедуктивной системе D определена истина (при помощи логических констант), то можно легко определить семантику для D.

Определение 8. *Для заданной дедуктивной системы D, в которой определена истина, семантика для D - это класс многосортных алгебр K_D сигнатуры σ_D.*

На уровне систем типов, $t \prec s$ влечет включение носителей соответствующих сортов $A_t \subseteq A_s$ как подалгебр, для всех алгебр $\mathcal{A} \in K_D$.

Определение 9 (Семантическое определение истины)**.** *Если $\mathcal{A} \in K_D$, e - логическое выражение типа s с переменными $\bar{x}$, и $\bar{a}$ - кортеж элементов из $\mathcal{A}$ (соотвествующих сортов), то значение терма (выражения) $e^{\mathcal{A}}(\bar{a})$ в алгебре $\mathcal{A}$ определяется стандартным образом.*

Мы говорим, что e истинно на $\mathcal{A}$ при означивании $\bar{a}$, если

$$e^{\mathcal{A}}(\bar{a}) = \top_s^{\mathcal{A}}$$

Что произойдет с семантикой K_D, если мы свяжем типы t и s ? В семантике K_D нет ограничений на носители A_t и A_s для алгебр из K_D. Связывание t с s влечет ограничение: $A_t \subseteq A_s$

поэтому A_t должна быть подалгеброй A_s. Если типы t и s связаны и невозможно удовлетворить ограничения $A_t \subseteq A_s$, оставаясь в классе K_D, мы приходим к семантической несовместности такого связывания **для конкретных типов**. Убрав типы t и s из рассмотрения, мы получим *осмысленную* семантику для оставшейся части. Таким образом, в многосортном случае, семантическая несовместность части дедуктивной системы оставляет возможность содержательно оперировать оставшейся частью.

Определение 10. *Пусть D - дедуктивная система, K_D - ее семантика и t и s - два типа. Обозначим через $K_D^{t \prec s}$ класс алгебр, полученный из K_D после накладывания ограничения $A_t \subseteq A_s$.*

Пример 5 (Синтаксис комбинации CPL и IPL)**.** *Рассмотрим классическую пропозициональную логику (CPL) и интуиционистскую пропозициональную логику (IPL): P и I с типами t_p and t_i соотвественно.*

$$D = (P \cup I)^{t_p \prec t_i}$$

Логика D - это комбинация, которая включает P и I. Если мы подставим в схемы аксиом для I выражения из логики P, мы не получим новых схем аксиом.

Пример 6 (Семантика D)**.** *Полная и корректная семантика: двусортные алгебры. Один сорт t_i - это сорт для Гейтинговой алгебры H, второй сторт t_p - это сорт булевой алгебры B, которая будет подалгеброй в H: $B \subseteq H$*

5 Выводимость и тождественная истинность

Далее будем оперировать понятием утверждения в дедуктивной системе D. А именно, утверждение - это конструкция вида $a = \frac{h_1,\ldots,h_k}{p}$, где $h_1, \ldots, h_k$ - список выражений (предпосылок) и p - выражение (заключение) a.

Определение 11. *Утверждение $a = \frac{h_1,\ldots,h_k}{p}$, называется тождественно истинным в семантике K_D, если для любой алгебры $A \in K_D$ и любого означивания $\bar{b}$ переменных $\bar{x}$ из a в этой алгебре, из того, что выражения $h_i(\bar{b})$ истинны для всех $i \leq k$, следует, что выражение $p(\bar{b})$ также истинно.*

Каждое утверждение $a = \frac{h_1,\ldots,h_k}{p}$ порождает частичную k-местную операцию $\vdash_a$ на множестве всех выражений E_D дедуктивной системы D:

Определение 12. *Подстановка θ называется несимметричным унификатором кортежей выражений $(a_1, \ldots, a_k)$ и $(b_1, \ldots, b_k)$, если*

- *θ согласована по типам с типами переменных выражений $a_1, \ldots, a_k$,*
- *$\theta(a_i) = b_i$ для всех $i \leq k$.*

Лемма 13. *Если несимметричный унификатор θ для двух кортежей выражений $\bar{a}$ и $\bar{b}$ существует, то он единственен.*

Доказательство. Следует из несимметричности: фактически значения подстановки θ - это подвыражения выражений из кортежа $\bar{b}$. □

В силу леммы, если несимметричный унификатор для кортежей $\bar{a}$ и $\bar{b}$ существует, то обозначим его $uni(\bar{a}; \bar{b})$.

$$\vdash_a (\bar{e}) = \begin{cases} \theta(p), & \text{если существует унификатор } \theta = uni(\bar{h}, \bar{e}) \\ \perp & \text{иначе} \end{cases}$$

Здесь символом $\perp$ обозначено неопределенное значение. В силу леммы 13, операция $\vdash_a$ определена корректно.

Понятие выводимости стандартное:

Определение 14. *Пусть B - множество утверждений в дедуктивной системе D, $a = \frac{h_1,\ldots,h_k}{p}$ - утверждение, P - терм сигнатуры $\{\vdash_b |b \in B\}$. Тогда P - это вывод a из B, если в алгебре выражений значение $P(h_1, \ldots, h_k)$ определено и выполнено $P(h_1, \ldots, h_k) = p$.*

Теперь, если A - множество аксиоматических утверждений D, то мы будем говорить, что утверждение a выводится в D, если существует вывод P из A.

Определение 15. *Семантика K_D для дедуктивной системы D называется корректной, если любое выводимое в D утверждение будет тождественно истинно в K_D.*

Теорема 16 (Сохранение корректности)**.** *Корректность сохраняется при связывании типов: если семантика K_D для дедуктивной системы D была корректна, то $K_D^{t \prec s}$ также будет корректна для $D^{t \prec s}$.*

Доказательство. При помощи индукции по глубине вывода, утверждение теоремы можно свести к выводу за один шаг, то есть к аксиоматическим утверждениям. Пусть $a = \frac{h_1,\dots,h_k}{p}$ - аксиоматическое утверждение в системе $K_D^{t \prec s}$. Поскольку операция связывания типов не меняет формы аксиом и правил грамматики (кроме цепных), то в системе D есть аналогичное утверждение $a' = \frac{h'_1,\dots,h'_k}{p'}$. Единственное что меняется - это то, что после связывания типов t и s стало возможным подставлять в переменные типа s выражения типа t. Поэтому утверждение a стало применимо в более широком круге случаев, чем a'.

Пусть $\mathcal{A} \in K_D$, и $h_i^{\mathcal{A}}(\bar{b}) = \top_i$ для всех $i \leq k$. Пусть среди всех переменных $x_1, \dots, x_m$, входящих в гипотезы утверждения a есть переменная x_j типа s, а выражение b_j, подставляемое в x_j, имеет тип t. Поскольку для $\mathcal{A}$ выполнено $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}_s$, то такая подстановка корректна и для утверждения a', то есть все предпосылки h'_i будут выполнены и для a'. Пусть r - это тип выражения p. Так как K_D корректная семантика, то $(p')^{\mathcal{A}}(\bar{b}) = \top_r$. Если тип r отличен от t, то тогда $p^{\mathcal{A}}(\bar{b}) = \top_r$. Если же $r = t$, то поскольку $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}_s$ и константы истинности для типов t и s должны совпадать, то также получим $p^{\mathcal{A}}(\bar{b}) = \top_r$. □

Список литературы

[1] R. Thomason,Combinations of tense and modality, volume 2 of Handbook of Philosophical Logic, 1984, pp. 135–165

[2] D. Gabbay, Fibred semantics and the weaving of logics: Part 1, Journal of Symbolic Logic, 61(4), 1996, pp 1057–1120.

[3] O. Kutz, C. Lutz, F. Wolter, M. Zakharyashev, O. Kutz, C. Lutz, F. Wolter, M. Zakharyaschev E-Connections of abstract description systems J. Artif. Intell., 156 (2004), pp 1–73

[4] A. Sernadas, C. Sernadas, J. Rasga, M. Coniglio, On graph-theoretic Fibring of logics, Journal of Logic and Computation, 19(6), 2009, pp 1321–1357

[5] Власов Д.Ю. Язык формальной математики Russell, Вестник НГУ (серия: математика, механика, информатика), 2011, 2 номер, стр. 27-50.

[6] C. Caleiro, R. Goncalves, On the algebraization of many-sorted logics. In J. Fiadeiro and P.-Y. Schobbens, editors, Recent Trends in Algebraic

Development Techniques - Selected Papers, volume 4409 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2007, pp 21-36

[7] J.M. Font, R.Jansana, A general algebraic semantics for sentential logics. Second, revised edition vol. 7 of Lecture Notes in Logic, Association for Symbolic Logic, 2009.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ M-ГРУПП

А.В. Зенков

Алтайский Государственный Аграрный Университет
Россия,656049, Барнаул, пр.Красноармейский 98
e-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

1 m-транзитивные представления

Напомним, что *m-группой* называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e,^{-1}, \vee, \wedge, \ _* \rangle$, где $\langle G, \cdot, e,^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является ℓ-группой и одноместная операция $_*$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e,^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$(xy)_* = x_* y_*, (x_*)_* = x, (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*$.

В дальнейшем m-группу G с фиксированным автоморфизмом $_*$ записываем *как пару* $(G,_*)$. Пусть Λ– некоторое линейно упорядоченное множество и a– реверсивный автоморфизм 2-го порядка Λ, то есть для любых $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ верно $((\lambda)a)a = \lambda$ и $\lambda < \lambda' \Leftrightarrow (\lambda)a > (\lambda')a$. Через $Aut(\Lambda)$ обозначим группу (относительно суперпозиции) всех порядковых подстановок Λ. Группа $Aut(\Lambda)$ может быть превращена в m-группу, если операция $_*$ задается при помощью равенства $g_* = aga$ для всякого $g \in Aut(\Lambda)$. Согласно [1], *представлением m-группы* $(G,_*)$ порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Λ является ℓ-гомоморфизм $\nu : G \to Aut(\Lambda)$ такой, что $((g)_*)\nu = a(g)\nu a$ для любого $g \in G$. Этот факт записываем в виде $((G)\nu, \Lambda, a)$. Если ν есть изоморфизм, то представление называется *точным* и тогда пишем (G, Λ, a). Отметим [1], что всякая m-группа допускает точное представление порядковыми подстановками подходящего линейно упорядоченного множества.

Представление $((G)\nu, \Lambda, a)$ назовем *m-транзитивным*, если для всех $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, быть может за исключением точки o, существует такой $x \in G_* = gr.((G)\nu, a)$, что $(\lambda)x = \lambda'$(здесь o– точка Λ, неподвижная относительно действия a).

Пусть $(G,_*)$– произвольная m-группа и V– ее выпуклая ℓ-подгруппа. Как обычно, через $R(G : V)$ обозначим множество правых смежных классов ℓ-группы G по ее выпуклой ℓ-подгруппе V с порядком: $Vx \leq Vy$ тогда и только тогда, когда $vx \leq y$ для некоторого $v \in V$. Если данный порядок линеен, то V называется *спрямляющей.* Имеет место следующая.

Теорема 1. *Пусть $(G,_*)$– m-группа и V– ее спрямляющая ℓ-подгруппа. Тогда существует линейно упорядоченное множество, определяемое V, такое, что группа допускает m-транзитивное представление подстановками этого множества. Обратно. Для всякого m-транзитивного представления $((G)\nu, \Lambda, a)$ найдется спрямляющая ℓ-подгруппа V, определяющая Λ.*

Выпуклая ℓ-подгруппа V m-группы $(G,_*)$ называется *представляющей*, если V-спрямляющая и не содержит неединичных m-идеалов.

Теорема 2. *Произвольная m-группа $(G,_*)$ допускает точное m-транзитивное представление тогда и только тогда, когда она содержит представляющую ℓ-подгруппу.*

Как обычно, неединичная m-группа $(G,_*)$ называется *подпрямо m-неразложимой*, если пересечение всех ее неединичных m-идеалов отлично от единицы.

Следствие 3. *Подпрямо неразложимая m-группа $(G,_*)$ допускает точное m-транзитивное представление.*

Следствие 4. *Всякое многообразие m-групп порождается m-группами, допускающими точное m-транзитивное представление.*

Сформулированные выше результаты опубликованы в [2].

2 Представления и сплетения m-групп

Пусть (G, Ω, a), (H, T, b)– представления m-групп (G, φ) и (H, ψ) соответственно и $\Omega = L_1 \overleftarrow{\bigcup} \{o_1\}^{\varepsilon_1} \overleftarrow{\bigcup} R_1$, $T = L_2 \overleftarrow{\bigcup} \{o_2\}^{\varepsilon_2} \overleftarrow{\bigcup} R_2$. Рассмотрим стандартное (в смысле ℓ-групп) сплетение $GWrH$. Всякий элемент $f \in GWrH$ имеет вид $f = (\{g_\tau\}, h)$, где $g_\tau \in G, \tau \in T, h \in H$. В [4] на $GWrH$ был определен реверсивный автоморфизм второго порядка $\varphi Wr \psi$ по правилу $(f)\varphi Wr\psi = (\{(g)\varphi_{(\tau)b}\}, (h)\psi)$, превращающий $GWrH$ в m-группу. Пусть $\Sigma = \Omega \overleftarrow{\times} T$. Определим на Σ отображение d по правилу: $(w, \tau)d = ((w)a, (\tau)b)$. Ясно, что d– реверсивный автоморфизм второго порядка Σ и $(o_1, o_2)d = (o_1, o_2)$. Определим теперь действие элементов группы $GWrH$ на Σ по принципу "правая"часть действует на "левой"и наоборот, а именно:

$$(w,t)(\{g_\tau\},h)=\begin{cases}((w)g_t,(t)h), \text{ если } w\le o_1,\ t\ge o_2,\\ ((w)g_{(t)b},(t)h), \text{ если } w\le o_1,\ t<o_2,\\ ((w)g_t,(t)h), \text{ если } w>o_1,\ t<o_2,\\ ((w)g_{(t)b},(t)h), \text{ если } w>o_1,\ t\ge o_2.\end{cases}$$

Ясно, что так определенное действие является точным и порядковым, т.е $GWrH \subseteq Aut(\Sigma)$. Проверим, что $(f)\varphi Wr\psi = dfd$. Так как проверка однотипна, то рассмотрим лишь один случай, например, $w < o_1, t > o_2$. Тогда $(w,t)(f)\varphi Wr\psi = ((w)ag_ta,(t)bhb)$. Далее, $(w,t)d = ((w)a,(t)b)$ и $(w)a > o_1, (t)b > o_2$. Поэтому $((w)a,(t)b)fd = ((w)ag_{((t)b)b},(t)bh)d = ((w)ag_t,(t)bh)d = ((w)ag_ta,(t)bhb)$, что и доказывает утверждение. Таким образом имеем представление $(GWrH,\Sigma,d)$ группы $(GWrH,\varphi Wr\psi)$, которое будем называть *сплетением* m-групп подстановок (G,Ω,a), (H,T,b).

Рассмотрим m-транзитивное представление (G,Λ,a). Стандартно, отношение эквивалентности Θ, определенное на Λ, будем называть отношением *m-эквивалентности*, если оно является выпуклым и $w\Theta w' \Leftrightarrow (w)x\Theta(w')x$ для любого $x \in G_*$. Через L_Θ обозначим множество всех элементов G, оставляющих все классы эквивалентности на месте. Множество L_Θ является m-идеалом G и m-группа $\overline{G} = G/L_\Theta$ действует точно и m-транзитивно на линейно упорядоченном множестве Ω/Θ. Зафиксируем некоторый класс m-эквивалентности $\triangle$. Это множество, в зависимости от свойств представления, позволяет построить новое множество ∇ и m-группу G_∇, действующую на нем m-транзитивно. Пусть $\Sigma = \nabla \overleftarrow{\times} \Omega/\Theta$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть представление (G,Λ,a) m- транзитивно и на Λ определена m-конгруэнция Θ. Тогда (G,Λ,a) изоморфна вложима в сплетение $(G_\nabla Wr\overline{G},\Sigma,d)$.*

Следствие 6. *Пусть (G,Λ,a)- m-транзитивная группа подстановок из произведения $\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}$ многообразий m-групп $\mathcal{U},\mathcal{V}$. Тогда (G,Λ,a) изоморфно вложима в сплетение подходящих m- транзитивных групп подстановок из многобразий m-групп $\mathcal{U},\mathcal{V}$.*

Результаты этого пункта опубликованы в [3]

3 Многообразия m-групп

Ясно, что на m–группу можно смотреть как на алгебраическую систему сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, {}_*\rangle$. Класс M всех m–групп образует многообразие сигнатуры m. Относительно теоретико-множественного включения M является частично упорядоченным множеством. Более того, M есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий m-групп. Обозначим через $\mathcal{I}$ многообразие m-групп, определяемое тождеством $x_* = x^{-1}$, а через $\mathcal{A}$– многообразие всех абелевых m-групп.

Рассмотрим представления (G, Ω, a) и (H, Λ, b). Фикируем некоторое конечное, но произвольное, множество $\Phi = \{w_p(\overline{x}, \overline{x_*}) \parallel p = 1, \dots, N\}$ слов сигнатуры m от переменных $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$. Далее, рассмотрим произвольный $\overline{h} = (h_1, h_2, \dots h_n) \in H^n$ и произвольную пару точек $\lambda, (\lambda)b \in \Lambda$. Пусть $\Lambda_\Phi = \{(\lambda)w_p(\overline{h}, \overline{h_*})\} \cup \{((\lambda)b)w_p(\overline{h}, \overline{h_*})\}$. Ясно, что Λ_Φ линейно упорядочено. Будем говорить, что (G, Ω, a) мимикрирует (H, Λ, b), если найдутся $\alpha, (\alpha)a \in \Omega$ и $\overline{g} = (g_1, g_2, \dots g_n) \in G^n$ такие, что линейно упорядоченное множество $\Omega_\Phi = \{(\alpha)w_p(\overline{g}, \overline{g_*})\} \cup \{((\alpha)a)w_p(\overline{g}, \overline{g_*})\}$ сохраняет структуру Λ_Φ, то есть $((\alpha)a^\varepsilon)w_p < ((\alpha)a^{\varepsilon'})w_q \Leftrightarrow ((\lambda)b^\varepsilon)w_p < ((\lambda)b^{\varepsilon'})w_q$, где $\varepsilon, \varepsilon' = 0,$ либо 1.

Представление (G, Ω, a) мимикрирует m-группу $(H, _*)$, если оно мимикрирует ее всякое представление. Наконец, представление (G, Ω, a) мимикрирует многообразие $\mathcal{V}$, если $(G, _*) \in \mathcal{V}$ и (G, Ω, a) мимикрирует все группы из $\mathcal{V}$. Несложно заметить, если (G, Ω, a) мимикрирует $\mathcal{V}$, то $(G, _*)$ порождает $\mathcal{V}$.

Определим $Inv : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по правилу $(z)Inv = -z$. Тогда пара $(\mathbb{Z}, Inv)$ есть m-группа. Рассмотрим правое регулярное представление $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbf{Inv})$, где $(z)\mathbf{Inv} = -z$. Верно.

Предложение 7. *Представление* $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbf{Inv})$ *мимикрирует* $\mathcal{I}$.

Следствие 8. *([4])* $\mathcal{I} = var_m((\mathbb{Z}, Inv))$.

Через $\mathbb{Z}^*$ обозначим аддитивную группу целых чисел, полученную из $\mathbb{Z}$, путем обращения порядка. Относительно координатного порядка прямое произведение $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ является ℓ-группой. Определим отображение $Exch : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ по правилу $(x, y)Exch = (y, x)$, где $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Тогда пара $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch)$ будет m-группой. Рассмотрим линейно упорядоченное множество $\Lambda = \mathbb{Z} \overleftarrow{\cup} \{o\} \overleftarrow{\cup} \mathbb{Z}^*$. Через $(z)_1((z)_2)$ обозначим элемент Λ строго меньший (больший) o и определим $\mathbf{Exch} : \Lambda \to \Lambda$ по правилу $(z)_1\mathbf{Exch} = (z)_2$, $(z)_2\mathbf{Exch} = (z)_1$ и $(o)\mathbf{Exch} = o$. Ясно, что $\mathbf{Exch}$ - реверсивный автоморфизм второго порядка Λ.

Предложение 9. *Представление* $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \Lambda, \mathbf{Exch})$ *мимикрирует* $\mathcal{A}$.

Следствие 10. *([4])* $\mathcal{A} = var_m((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch))$.

Следующая теорема позволяет применять технику сплетений при изучении многообразий. Более точно.

Теорема 11. *Пусть многообразие m-групп $\mathcal{U}$ порождается классом m-групп $\boldsymbol{U}$ и многообразие m-групп $\mathcal{V}$ мимикрируется классом m-групп $\boldsymbol{V}$. Тогда $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} = var_m(\boldsymbol{W})$, где $\boldsymbol{W} = \{(UWrV, bWrc)\}$, $(U,b) \in \boldsymbol{U}$, $(V,T,c) \in \boldsymbol{V}$.*

Следствие 12. *1)* $\mathcal{I}^n = var_m(Wr^n(\mathbb{Z}, Inv))$, *2)* $\mathcal{A}^n = var_m(Wr^n(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch))$.

Теоремы этого раздела доказаны в [5].

Список литературы

[1] Giraudet M.,Lukas F. Groupes á motié ordonnés// Fundam.Math.1991.139,№2.P.75-89.

[2] Вараксин С.В., Зенков А.В. О представлениях m-групп //Сиб.матем.журнал.2013.Т.52.№6.С.1264-1270.

[3] Зенков А.В. Сплетения групп монотонных подстановок //Сиб.матем.журнал.2011.Т.54.№2.С.298-302.

[4] Giraudet M.,Rachunek J. Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains// Czech.Math.J.1999.V.49,№124.P.743-766.

[5] Зенков А.В. О произведениях многообразий m-групп //Алгебра и Логика.2012.Т.51.№6.С.722-733.

Part II
Day of problems

ДВЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ О ГРУППАХ И АЛГЕБРАХ

В. А. Чуркин

Институт математики С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: churkin@math.nsc.ru

Улам [1] отметил ряд проблем об изоморфном вложении групп Ли в группу перестановок счетного множества. Часть из них решена положительно, в частности, для линейных групп Ли (см., например, [2]). Для нелинейных групп Ли проблема изоморфного вложения остается нерешенной. Предлагается несколько более частных и более общих задач в том же направлении.

1. Вкладываются ли изоморфно в группу перестановок счетного множества следующие группы:

а) фактор-группа нильпотентной группы вещественных унитреугольных матриц порядка 3 по нетривиальной дискретной подгруппе ее центра;

б) универсальная накрывающая группа для унимодулярной группы $SL_2(\mathbb{R})$;

в) группы Стейнберга над континуальным полем;

г) группа унитарных операторов сепарабельного гильбертова пространства.

Симметрическая билинейная форма на вещественной алгебре Ли L называется *инвариантной*, если присоединенные операторы $ad\,(a) : x \mapsto [a, x]$, $x \in L$, кососимметричны относительно этой формы при всех $a \in L$. Известно, что форма Киллинга для для классических простых алгебр Ли инвариантна, невырождена и симметрична. Тем не менее, алгебры с такой формой могут иметь ненулевой разрешимый радикал и даже могут быть разрешимыми. Четырехмерных алгебр с такой формой всего 4, тогда как различных четырехмерных алгебр Ли бесконечно много. Есть надежда на аналогичный результат в произвольной конечной размерности. Предлагаются следующие задачи.

2. а) Описать все вещественные конечномерные алгебры Ли, на которых существует инвариантная невырожденная симметрическая билинейная форма.

б) Верно ли, что в каждой размерности число таких алгебр с точностью до изоморфизма конечно?

в) Что будет в случае, когда алгебра имеет нулевой центр и целочисленные структурные константы в подходящем базисе?

Последняя задача интересна в связи с классификацией кристаллографических групп движений псевдоевклидовых пространств. Первая — в связи с классификацией групп Ли, имеющих структуру псевдоримманова многообразия.

Литература:

1. Улам С. Нерешенные математические задачи// Наука, М., 1964.

2. Ершов Ю.Л., Чуркин В.А. Об одной задаче Улама// Доклады Академии наук, 2004, Т. 399, № 3, С. 307–309.

PROBLEMS ON CLASSIFICATION OF COUNTABLE MODELS OF COMPLETE THEORIES

S.V. Sudoplatov

Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State Technical University,
20, K.Marx avenue, Novosibirsk, 630073, Russia;
Novosibirsk State University,
2, Pirogova street, Novosibirsk, 630090, Russia
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

We pose some open problems being arisen in connection with the general studying of countable models of complete theories [1, 2]:

• Problem of descriptions of hypergraphs of prime models, Rudin–Keisler preorders, and distribution functions of number of limit models and the other countable models for various natural classes of algebraic systems;

• Problem of hierarchical description, as well as the description of interrelation of limit models and the other countable models;

• Problem of hierarchical description, as well as the description of interrelation of countable homogeneous models of small theories and of countable theories with continuum many types;

• Problem of the existence of algebraic examples of l-Ehrenfeucht theories;

• Problem of the existence of l-Ehrenfeucht theories in various classes of theories and, in particular, in the class of simple theories that do not have types with the infinite own weight;

• Problem of existence of l-Ehrenfeucht ω-stable (superstable) theory;

• (E. A. Palyutin) Problem of existence of a theory T with

$$\omega < P(T) < 2^{\omega};$$

• Problem of existence of a theory T with $\omega < L(T) < 2^{\omega}$ (for small theories, it is a reformulation of the Vaught problem);

• Problem of existence of a theory T with $\omega < \mathrm{NPL}(T) < 2^{\omega}$.

References

[1] S.V. Sudoplatov, *The Lachlan problem*, NSTU, Novosibirsk, 2009 (in Russian, English version is available in: http://www.math.nsc.ru/~sudoplatov/lachlan_eng_03_09_2008.pdf).

[2] R.A. Popkov and S.V. Sudoplatov, *Distributions of countable models of complete theories with continuum many types*, arXiv:1210.4043v1 [math.LO] (2012).

Abstracts

Maria Dimarogkona, Petros Stefaneas. *Semantic Networks and the Theory of Institutions.*

Abstract. In this short article we claim that a new relation can be developed between the well-known theory of institutions and semantic networks. In particular, we argue that the many different types of semantic networks that have been used in the field of applied computer science can be formalized mathematically using the theory of institutions. We demonstrate the first steps towards such an institution-based theory of semantic networks, using the familiar proof that first-order logic is an institution to provide an indicative such framework.

F.A. Dudkin. *On the embedding of Baumslag–Solitar groups in generalized Baumslag–Solitar groups.*

A generalized Baumslag-Solitar group (GBS group) is a finitely generated group G which acts on a tree with all edge and vertex stabilizers infinite cyclic. Let p and q be co-prime integers, not equal to $0, 1, -1$. We prove that Baumslag–Solitar groups $BS(p, q)$ is embedded into G if and only if in G equation $x^{-1}y^px = y^q$ is solvable with $y \neq e$. (equally $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$, there Δ is modular homomorphism).

$\boxed{\textbf{S.Mardaev}}$. *External modalities and fixed points.*

Properties of fixed points of modal formulas and defining formulas are investigated.

A.G. Pinus. *The prorerties of rigidity, pseudosiplity, transitivity of algebras, which are expressed in the language $L_{\omega_1\omega}$.*

We give some examples of non-elementary properties of algebras which are expressed in the language $L_{\omega_1\omega}$

L.N. Pobedin. *Computability with oracle in both classical and alternative infinity.*

It has been carried out the contrastive analysis ZF with AST (Alternative Set Theory).

E.N. Poroshenko. *On Universal Equivalence of Partially Commutative Metabelian Lie Algebras.*

In this paper, we consider partially commutative metabelian Lie algebras whose defining graphs are cycles. We show that such algebras are universally equivalent iff the corresponding cycles have the same length. Moreover, we give an example showing that the class of partially commutative metabelian Lie algebras such that their defining graphs are trees is not separable by universal theory in the class of all partially commutative metabelian Lie algebras.

L.A. Sholomov. *Disjunctive and selective matrices.*

Let $\mathcal{T}$ be a collection of some subsets T of a finite set M. A Boolean matrix with columns indexed by elements of M is called (i) $\mathcal{T}$-disjunctive, (ii) T-selective, if, for all $T \in \mathcal{T}$ and $i \notin T$, (i) the disjunction of columns from T don't covers the column i, (ii) the minimal subcube including all columns from T don't contains the column i. These matrices appear in underdetermined data storage problems. In the article, we learn interconnection and properties of $\mathcal{T}$-disjunctive and $\mathcal{T}$-selective matrices, obtain upper and lower bounds for minimal number of rows of these matrices.

Irina Starikova. *Searching for a Different Perspective on Groups: Some Philosophical Reflections.*

The paper offers a philosophical approach to visual representations in mathematics as leading to a new resourceful approach. Namely, it discusses examples when the change of visual representations facilitates application of algebraic approach to geometry and vise versa.

S.V. Sudoplatov. *Algebras of distributions of formulas with respect to generalized semi-isolation.*

We generalize the notion of semi-isolation for families of closed sets of types and define algebras of distributions of formulas with respect to generalized semi-isolation. We describe structural properties and hierarchies for these algebras.

E.I. Timoshenko. *On Bardakov and Neshchadim's one question for metabelian groups.*

V.G.Bardakov and M.V.Neshchadim in the paper "On the number of relations in free products of abelian groups" published in the Siberian Mathematical Journal (2012) proved some Proposition for nilpotent groups. Authors ask, whether it is correctly for metabelian groups. We are answered in the negative on this question

A.A. Vikentiev. *Model Metrics and Unreliabilities for Logical Formulas, Applications in Pattern Recognition and Cluster Analysis.*

We consider formulas of n-valued logic. Such formulas could be used as records of experts' judgments or formulas. We use methods of mathematical logic and models theory for n-valued logic to define metrics on formulas (propositions) and unreliability (uncertainty, unauthentic) measures. We study properties of such metrics and measures. The novelties of this paper are the definition of metrics on the classes of equivalent formulas and the definition of uncertainty (unreliability, unauthentic) measures together with finding their good properties. We also note their importance for cluster analysis, creating of deciding functions and pattern recognition.

A.A. Vikentiev,R.A. Vikentiev, E.S. Kabanova. *New model metrics for formulas in n-valued logic and measure of unreability in clasterization algorithms.*

We consider formulas of n-valued logic. Such formulas could be used as records of experts' judgments We use methods of mathematical logic and models theory for n-valued logic to define metrics on formulas (propositions) and uncertainty (unauthentic) measures. We study properties of such metrics and measures. The novelties of this paper are the definition of metrics on the classes of equivalent formulas and the definition of unauthentic (uncertainty, unreliability) measures together with finding their good properties. We also note their importance for cluster analysis, creating of deciding functions and pattern recognition.

D.Yu. Vlasov. *Type binding as a method of combining logics.*

The approach to the combination of logics, which based on the type binding, is proposed. Syntactic and semantic sides of this approach are observed, the correctness preservation theorem is proved: correctness is preserved at type binding operation.

A.V. Zenkov. *On representations of m-groups.*

This article is a short survey of the recent results in the study of representations of m-groups and their applications to the theory of m-group varieties.

V.A. Churkin. *Two problems on groups and algebras.*
Two unresolved problems on groups and algebras

S.V. Sudoplatov. *Problems on Classification of Countable Models of Complete Theories.*
Problems on Classification of Countable Models of Complete Theories

Contents

ALGEBRA AND MODEL THEORY 9

Collection of papers

Edited by *A.G. Pinus, K.N. Ponomarev,*
S.V. Sudoplatov, E.I. Timoshenko

Подписано в печать 15.11.2013. Формат 70×108 1/16. Бумага офсетная.
Тираж 200 экз. Уч.-изд. л. 15,05. Печ. л. 10,75. Изд. №257. Заказ №1450.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20