Novosibirsk State Technical University

Algebra and model theory *12*

Collection of papers
edited by A. G. Pinus, E. N. Poroshenko,
and S. V. Sudoplatov

Novosibirsk
2019

Algebra and model theory

UDC **512(06)**
A 35

ISSN 2619-0486
2019

Учредитель

ФГБОУ "Новосибирский государственный технический университет"

Редакционная коллегия

Адрес редакции, издателя: 630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, НГТУ,
Тел. (383) 346-11-66
E-mail: algebra@nstu.ru

UDC 512(06)

Introduction

Algebra and model theory 12

The 13th International Summer School-Conference "Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory" was held on 23–29 of June 2019 at the camping center "Erlagol" (Chemal district, the Altai Republic). The School was organized by Algebra and Mathematical Logic Department of Novosibirsk State Technical University (NSTU) and Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (IM SBRAS). This school was dedicated to the 90th anniversary of birth of professor A. I. Kokorin and the 60th anniversary of professor K. N. Ponomarev. The School was supported by Grant of NSTU (C19-2). At the school-conference, there were participants from France, Kazakhstan, Kyrgyzstan, and Russia. They made 26 talks. Within the school-conference, the discussion on problems put in "Erlagol's problem notebook" was held.

The Organizing Committee of the School-Conference

Памяти Е. А. Палютина

За время прошедшее между 12-ой и 13-ой Эрлагольскими конференциями (в ноябре 2018 года) ушел из жизни Евгений Андреевич Палютин, замечательный математик и человек. Его работы и работы его учеников составляют одну из наиболее значительных страниц Сибирской школы теории моделей. Он стоял у истоков Эрлагольских конференций по пограничным вопросам универсальной алгебры и теории моделей, был неизменным членом оргкомитетов этих конференций, активным их участником. Он неоднократно публиковался в трудах Эрлагольских конференций. Одиннадцатая конференция, прошедшая в 2015 году была посвящена его 70-летию. Евгений Андреевич Палютин навсегда останется в нашей памяти.

Оргкомитет и участники
13-ой Международной школы-конференции
“Пограничные вопросы универсальной алгебры
и теории моделей”

Program of
13th International Summer School-Conference "Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory"

June 24, Monday

10:00am–10:10am	Opening School-Conference
10:10am–10:30am	S. Vinokurov (Irkutsk, Russia), N. Peryazev (Saint-Petersburg, Russia) "On mathematical works of A. Kokorin"

Chairman S. Sudoplatov

10:30am–10:50am	K. Ponomaryov (Novosibirsk, Russia) "Multiplicative group of zero-characteristic field with finite ramification (talk by A. Chekhonadskih)"
11:00am–11:50am	B. Kulpeshov (Almaty, Kazakhstan) "Vaught's conjecture for weekly *o*-minimal theories of finite convexity rank"
Noon–12:20pm	M. Sheremet (Novosibirsk, Russia) "Standard interpretation of partial functions and multi-functions"

Chairman S. Vinokurov

3:00pm–3:20pm	N. Galanova (Tomsk, Russia) "Symmetric cuts of real closed non-Archimedean fields"
3:30pm–3:50pm	A. Kazimirov (Irkutsk, Russia) "On difficulty of multifunction standard forms"
4:00pm–4:20pm	A. Zakharov (Novosibirsk, Russia) "Algebraic varieties allied to Gelfand–Dorfman–Novikov algebras"
4:30pm–4:50pm	A. Chekhonadskih (Novosibirsk, Russia) "Algebraic aspects of gyroscopic stabilization"
5:00pm–5:20pm	F. Dudkin (Novosibirsk, Russia) "$\mathcal{F}_\pi$ residuality of generalized Baumslag–Solitar groups"

June 25, Tuesday

Chairman V. Verbovskiy

10:00am–10:50am	A. MOROZOV (Novosibirsk, Russia) "On Sigma-representable structures over the reals"
11:00am–11:50am	V. CHURKIN (Novosibirsk, Russia) "Splittable Lie algebras of type $G2$ and stable matrices"
Noon–12:50pm	S. SUDOPLATOV (Novosibirsk, Russia) "Families of the theories and their characteristics"

Chairman N. Peryazev

3:00pm–3:20pm	A. ZABARINA, E. FOMINA (Tomsk, Russia) "On the set $K_p(G)$ in finite groups"
3:30pm–3:50pm	A. BALYUK (Irkutsk, Rossia) "On decomposition of functions under finite fields to sums of products of unary functions"
4:00pm–4:20pm	N. MARKHABATOV (Novosibirsk, Russia; Nur-Sultan, Kazakhstan) "Ranks for families of permutation theories"
4:30pm–4:50pm	E. POROSHENKO (Novosibirsk, Russia) "Universal equivalence of partially commutative Lie algebras of some class"

June 26, Wednesday

Chairman A. Morozov

10:00pm–10:50pm	V. Roman'kov (Omsk, Russia), E. TIMOSHENKO (Novosibirsk, Russia) "Verbally closed subgroups of free solvable groups"
11:00pm–11:50pm	A. PINUS (Novosibirsk, Russia) "Universal algebras and funtional clones (on scales of universal algebras on fixed sets)
Noon–12:50pm	B. POIZAT (Lyon, France) "Symmetries in groups without involutions"

Chairman V. Churkin

3:00pm–3:50pm	N. Peryazev (Saint-Petersburg, Russia) “On algebras of operations and algebras of multioperations”
4:00pm–4:20pm	E. Grachev, A. Popova (Novosibirsk, Russia) ”Extending automorphisms of character fields to automorphisms of integer group fields of finite groups”
4:30pm–4:50pm	A. Zenkov (Barnaul, Russia) ”On o-approximability m-groups”

June 27, Thursday

Chairman A. Pinus

3:00pm–3:20pm	A. Borodin (Gorno-Altaysk, Russia) “To homogroup theory-I”

June, 28, Friday

Chairman B. Kulpeshov

10:00am–10:50am	S. Vinokurov (Irkutsk, Russia) “Invertible computations and polynomials of boolean functions”
11:00am–11:50am	A. Nurakunov (Bishkek, Kyrgyzstan), A. Kravchenko, M. Shvidevski (Novosibirsk, Russia) ”On lattices of quasi-varieties, varieties and congruences”
Noon–12:50pm	A. Shevlyakov (Omsk, Russia) “Model theory and universal algebra in machine learning”

Chairman E. Poroshenko

3:00pm–3:50pm	V. Verbovskiy (Almaty, Kazakhstan) “Properties of formula subsets of ordered structures”
4:00pm–4:20pm	Erlagol notebook: old and new problems
4:30pm–4:40pm	Closing School-Conference

К 90-летию со дня рождения профессора А. И. Кокорина

Али Иванович Кокорин родился 15 ноября 1929 года в г. Свердловске. Окончив среднюю школу, он поступает в военное училище. После завершения учебы А. И. Кокорин направлен на Дальний Восток для прохождения дальнейшей службы в рядах Советской Армии. Он служит офицером морской пехоты в г. Порт-Артур вплоть до демобилизации.

После демобилизации в 1954 году Али Иванович возвращается в Свердловск, устраивается работать на Уральский машиностроительный завод.

В этом же году он поступает на заочное отделение физико-математического факультета Уральского государственного университета на специальность “Математика”. С третьего курса переводится на очную форму обучения и увольняется с завода, однако из-за тяжелого материального положения трудовую деятельность продолжает, но работает уже тренером по шахматам и плаванию.

Дальнейшую жизнь после окончания Уральского государственного университета и научно-педагогическую деятельность Али Ивановича можно разбить на три периода.

Свердловский период (1960–1964 гг.). С 1960 года А. И. Кокорин работает ассистентом, затем старшим преподавателем в Свердловском филиале заочного института советской торговли и учится в аспирантуре Уральского государственного университета. Учеба в аспирантуре прерывается на один год, в течение которого Али Иванович работает учителем математики в поселковой школе. В аспирантуре Али Иванович под влиянием создателя уральской алгебраической школы профессора П. Г. Канторовича начинает заниматься новым направлением в алгебре — упорядоченными группами, быстро став лидером этого направления. Достижения этого периода были настолько значительны, что результаты (аспиранта!) были опубликованы в Докладах АН СССР. Ссылки на работы А. И. Кокорина этого периода встречаются практически во всех монографиях по алгебраическим структурам, связанных с упорядоченными группами. За время учебы в аспирантуре под руководством профессора П. Г. Канторовича Али Иванович подготовил кандидатскую диссертацию на тему “Вопросы упорядочения групп” и в 1964 году защитил её в диссертационном совете Новосибирского университета.

Новосибирский период (1964–1969 гг.). В 1964 году Али Иванович по приглашению академика А. И. Мальцева переезжает в новосибирский Академгородок, где начинает работу на кафедре алгебры и математической логики Новосибирского государственного университета, сначала старшим преподавателем, затем доцентом. В НГУ А. И. Кокорин читает спецкурс по упорядочиваемым группам, ведет семинар на эту же тему. Материалы его спецкурса "Упорядочиваемые группы" выходят в издательстве НГУ в 1966 году. Это был первый выпуск известной серии "Библиотека кафедры алгебры и математической логики", где в дальнейшем вышло более 20 выпусков. Впоследствии этот текст стал основой книги "Линейно упорядоченные группы", вышедшей в издательстве "Наука" в 1972 году (в соавторстве с В. М. Копытовым). Это была первая книга из всемирно известной серии "Современная алгебра".

В 50-е и 60-е годы прошлого века большое внимание математиков уделялось теоретико-модельным исследованиям в алгебре и математической логике. В Новосибирске эти исследования проводились под руководством академика А. И. Мальцева, и Али Иванович, приехав в Новосибирск, сразу же окунулся в эту тематику, включив в свои исследования вопросы разрешимости и элементарной классификации такой естественной логической модели, как упорядоченная группа. Это отразилось и на его учениках, Н. Г. Хисамиеве и Г. Т. Козлове, защитивших кандидатские диссертации в Новосибирский период, — обе диссертации содержат результаты по элементарной теории решеточно упорядоченных абелевых групп.

Иркутский период (1969–1987 гг.). В 1969 году Али Иванович по приглашению ректора Иркутского государственного университета Н. Ф. Лосева переезжает в г. Иркутск и на математическом факультете Иркутского государственного университета создает кафедру алгебры и логики. Это время можно назвать периодом основания алгебрологической школы г. Иркутска, ведь А. И. Кокорин был первым специалистом по алгебре и математической логике в Иркутске. Став заведующим кафедрой, Али Иванович развивает бурную деятельность по развитию алгебро-логического направления: организует научные семинары, налаживает издание сборников научных трудов по алгебре, математической логике и кибернетике, проводит научную конференцию всесоюзного уровня. Для обсуждений проводимых в Иркутске научных исследований приглашаются ведущие специалисты из Москвы, Новосибирска, Ленинграда, Киева, Кишинева, Свердловска. Серьезно Али Иванович относится и к работе с молодежью: читает лекции школьникам в летней физико-математической школе; привлекает к работе семинаров, а затем и к научным исследованиям, студентов. Аспирантов Али Иванович выбирает из собственных выпускников математического факультета. Все его аспиранты Иркутского периода (за исключением двух, окончивших Новосибирский университет, и также являвшихся его учениками), были выпускниками Иркутского университета.

В круг научных интересов кафедры всегда входили вопросы, связанные с применением ЭВМ в образовании и в прикладных научных исследованиях. Особенно активно это стало проявляться с конца 1970-х, начала 1980-х годов, а с 1984 года кафедра стала называться кафедрой алгебры, логики и кибернетики.

За достижение выдающихся научных результатов и значительных успехов в создании алгебро-логической школы Иркутска в 1981 году А. И. Кокорину было присвоено ученое звание профессора.

Кафедрой А. И. Кокорин руководил с момента ее создания 5 декабря 1969 года и до последних дней своей жизни. Скончался А. И. Кокорин в Иркутске 22 октября 1987 года после тяжелой скоротечной болезни (похоронен в Свердловске).

В научной деятельности Али Ивановича можно выделить пять направлений, которые тесно пересекаются между собой.

Первое направление — теория упорядоченных групп. Исследования в этом направлении активно проводились с начала 1960-х и до середины 1980-х годов, когда была защищена кандидатская диссертация его аспиранта В. Ф. Клейменова. За этот период им была опубликована 21 работа, из которых 10 — за время работы в г. Свердловске, 8 — в г. Новосибирске и 3 — в г. Иркутске.

Его первая работа содержала тезисы доклада на Вторую Сибирскую конференцию по математике и механике. Эта работа была процитирована в известной монографии Л. Фукса "Частично упорядоченные алгебраические системы". В тезисах анонсировалось доказательство существования линейно упорядоченной группы с единственным способом упорядочения. Однако подход, предложенный А. И. Кокориным, реализован в дальнейшем не был. Но всё же, существование таких групп было получено через несколько лет В. Длабом и В. В. Блудовым.

В 1962 году вышли ещё три работы А. И. Кокорина, которые вошли в его кандидатскую диссертацию. Отметим, что в одной из них рассматривался полуоднородный порядок (который может меняться на противоположный при умножении неравенства на общий кратный элемент). В то время это было новым направлением в теории некоммутативных упорядочиваемых групп, и оно нашло продолжение только в конце 1970-х годов, когда Али Иванович работал в Иркутске.

Ещё одно направление в теории упорядочиваемых групп связано с изучением возможности продолжения частичных порядков до полных (линейных) порядков. Группы, в которых такое продолжение всегда возможно, называются доупорядочиваемыми. И хотя понятие доупорядочиваемой группы возникло в 1950 году в работах японского математика Ониси, основные результаты по теории доупорядочиваемых групп были получены в 1960-х годах. И здесь отметим работы М. И. Каргаполова, А. И. Кокорина и В. М. Копытова. Несколько работ А. И. Кокорина, выполненные в Новосибирске, были посвящены свойствам относительно выпуклых подгрупп.

По этому направлению под руководством А. И. Кокорина было защищено две диссертации: В. В. Блудовым и В. Ф. Клейменовым (соруководитель В. В. Блудов).

Второе направление научной деятельности А. И. Кокорина — универсальные и расширенные теории упорядоченных групп, которыми он занимался, в основном, с 1963 по 1970 год. По этому направлению опубликовано 5 работ, из них одна в Свердловский период, три — в Новосибирский период и одна — в Иркутский период, учениками защищено две диссертации — Н. Г. Хисамиевым (соруководитель А. Д. Тайманов) и Г. Т. Козловым.

Третье направление научной деятельности А. И. Кокорина — расширенные теории и вопросы разрешимости (1969–1981 гг.). Опубликовано 14 работ, из них одна в Новосибирский период, а остальные — в Иркутский период. Учениками защищено 6 кандидатских диссертаций — Ю. Г. Пензиным, В. И. Мартьяновым, А. М. Слободским, Э. И. Фридманом, Н. А. Перязевым, З. А. Дулатовой. Исследование расширенных теорий и вопросов разрешимости для А. И. Кокорина было основным в Иркутский период. В это время он уделял большое внимание ученикам, создавая в Иркутске с нуля научную алгебро-логическую школу. Почти все публикации в этом направлении написаны им совместно с учениками. Две статьи имеют обзорный характер и написаны по результатам пленарных докладов, сделанных на Всесоюзных конференциях по математической логике. Одна из них опубликована в престижном математическом журнале “Успехи математических наук” совместно с А. Г. Пинусом.

Четвертое направление научной деятельности А. И. Кокорина — применение ЭВМ в алгебре и математической логике (1975–1985 гг.). Это направление в основном разрабатывали ученики Али Ивановича, при его непосредственном руководстве. Учениками были защищены 3 диссертации: Ю. П. Васильевым, В. И. Болдоновым, А. В. Манциводой. Опубликовано только две работы, причем статья, написанная совместно с В. В. Блудовым, носит обзорный характер и вышла в известном киевском журнале “Кибернетика”.

Пятое направление научной деятельности А. И. Кокорина — математическое моделирование общественных процессов (1985–1987 гг.). Отечественная история, религия, христианство и язычество на Руси всегда входили в круг интересов А. И. Кокорина. Тысячелетие крещения Руси (1988 г.) он воспринимал как дату серьезного события в истории русской государственности, поэтому перед этой датой много занимался вопросами религии, моделировал переход к единобожию. Для построения математической модели перехода от политеизма к монотеизму А. И. Кокорин использует новую для него область математики — теорию игр. Построенная им модель перехода от язычества к христианству в виде позиционной игры заинтересовала историков и религиоведов. В августе 1987 г. в Москве проходил VIII Международный конгресс по логике, методологии и философии науки. Он был организован Академией наук СССР под эгидой Отделения логики, методологии и философии науки Международного союза истории и философии науки. Программный комитет пригласил Али Ивановича принять участие в работе конгресса. Али Иванович принял приглашение и выступил с докладом, в котором дал обоснование построенной им математической модели перехода от политеизма к монотеизму. К сожалению тяжелая болезнь прервала эти исследования. Али Иванович всего несколько месяцев не дожил до официального празднования 1000-летия крещения Руси. Он успел опубликовать по этому направлению только две работы, а еще одна статья оформлена и опубликована В. П.,Тарасовой уже после смерти А. И. Кокорина.

А. И. Кокорин не только получал результаты, но и систематически публиковал открытые вопросы по теории групп в Коуровской тетради, по теории колец в Днестровской тетради и по математической логике в Логической тетради.

В настоящее время научная школа А. И. Кокорина состоит из нескольких десятков математиков, имеющих ученые степени, восемь из которых доктора наук. Большая их часть составляет Иркутскую научную школу по алгебре, логике и кибернетике.

П. Е. Алаев, В. В. Блудов, А. В. Васильев,
А. А. Викентьев, С. Ф. Винокуров, С. С. Гончаров,
Ф. А. Дудкин, Г. П. Егорычев, Ю. Л. Ершов,
В. Н. Желябин, В. М. Копытов, В. Д. Мазуров,
Л. Л. Максимова, Н. Д. Мархабатов, И. А. Мальцев,
А. С. Морозов, С. П. Одинцов, В. И. Пантелеев,
Н. А. Перязев, А. Г. Пинус, А. М. Попова,
В. Г. Пузаренко, Н. С. Романовский, А. Н. Ряскин,
А. И. Стукачев, С. В. Судоплатов, Е. И. Тимошенко,
Н. Г. Хисамиев, В. А. Чуркин, М. В. Швидефски

К 60-летию профессора К. Н. Пономарева

Своё шестидесятилетие 6 октября 2018 года отметил доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики НГТУ Константин Николаевич Пономарёв.

Окончив механико-математический факультет Новосибирского государственного университета в 1980 году, К. Н. Пономарёв поступил в аспирантуру Института математики СО АН, где его руководителем стал известный специалист по теории групп В. Н. Ремесленников. В аспирантские годы были получены основные результаты кандидатской диссертации Константина Николаевича "Абстрактные изоморфизмы разрешимых алгебраических групп", защищённой в Минске в 1987 году.

Более тридцати лет Константин Николаевич посвятил преподавательской работе в НЭТИ-НГТУ, пройдя все ступени от ассистента до профессора. В период с 2007 по 2009 г. он заведовал кафедрой АиМЛ, на которой работал с момента её создания в 1992 году. Поддерживая курс на совмещение педагогической и исследовательской работы, К. Н. Пономарёв защитил в 1998 году докторскую диссертацию "Групповые свойства разрешимых алгебраических групп". Помимо разрешимых алгебраических групп, в область научных интересов юбиляра входят нормированные и локальные поля, алгебры Ли, неассоциативные кольца и различные вопросы общей алгебры. Его результаты нашли отражение в восьмидесяти научных публикациях, а также в трёх монографиях, напечатанных в НГТУ с 2007 по 2016 гг. Участник множества международных алгебраических конференций, Константин Николаевич совместно с профессором А. Г. Пинусом в течение двенадцати лет был соруководителем Международной летней школы "Пограничные вопросы алгебры и теории моделей", традиционно проводимой на базе НГТУ "Эрлагол".

Широка и география научной деятельности К. Н. Пономарёва. Он поддерживает связи с алгебраистами Санкт-Петербурга, Москвы, Минска, Германии, Турции, Южной Кореи, США и Канады. В качестве приглашенного лектора в 2001–2002 гг. он работал в Эгейском университете (Измир, Турция), а в 2004–2006 гг. — в южнокорейских университетах Кванг-Янга и Поханга. Среди многих результатов — две защищённые под руководством юбиляра PhD диссертации.

Научная работа К. Н. Пономарёва неоднократно поддерживалась грантами министерства и РФФИ, а его труды в науке и образовании отмечены грамотами министерства, областной администрации и ректората НГТУ.

С самого начала своей педагогической работы Константин Николаевич стремился развивать оригинальные эффективные способы преподнесения материала, будь то алгебра, анализ, дискретная математика или методы оптимизации. Исключительно ценной оказалась эта его способность в 1990-е годы, когда наплыв студентов заочного обучения поставил под сомнение прежние способы преподавания. К счастью, многие из его педагогических находок изложены в ряде учебно-методических пособий, а всё сказанное вместе с учёным званием профессора (2000 г.) принесло К. Н. Пономарёву заслуженный авторитет среди коллег и студентов.

Товарищам Константин Николаевич известен как исключительно оптимистичный, доброжелательный и отзывчивый человек, прекрасный семьянин; совершив в юности выбор между музыкой (в активе юбиляра окончание музыкального училища по классу фортепиано) и алгеброй в пользу последней, он остался представителем высокой культуры. Недуг, ограничивающий его подвижность в последние десятилетия, не позволил ему наращивать спортивные достижения в лыжных гонках, но никак не отразился ни на его характере, ни на профессиональной квалификации, ни на отношениях с сослуживцами и студентами.

Долгих и плодотворных лет, здоровья и благополучия Вам, Константин Николаевич!

П. Е. Алаев, А. В. Васильев, А. А. Викентьев,
С. С. Гончаров, Ф. А. Дудкин, Ю. Л. Ершов,
В. Н. Желябин, В. Д. Мазуров, Л. Л. Максимова,
И. А. Мальцев, Н. Д. Мархабатов, А. С. Морозов,
С. П. Одинцов, А. Г. Пинус, Е. Н. Порошенко,
В. Г. Пузаренко, Н. С. Романовский, А. Н. Ряскин,
А. И. Стукачев, С. В. Судоплатов, Е. И. Тимошенко,
Н. Г. Хисамиев, Д. Г. Храмцов, В. А. Чуркин,
М. В. Швидефски

К ТЕОРИИ ГОМОГРУПП-I

А. Н. Бородин

Горно-Алтайский государственный университет
ул. Ленкина, 1, г. Горно-Алтайск,
649000, Россия
e-mail: SerajSova@yandex.ru

1 Определение феноменологической симметрии универсальной алгебры

Основным объектом изучения в этой статье является феноменологическая симметрия, играющая фундаментальную роль в физике [1], [2] и геометрии [3]. В работе описаны феноменологически симметричные алгебры ранга 3 малого порядка, построенные на основе гомогрупп.

Проиллюстрируем феноменологическую симметрию плоскости Евклида следующим примером, предложенным в [3] Михайличенко Г. Г. В декартовой системе координат (x, y) квадрат расстояния $\rho(i, j)$ между любыми двумя её точками $i = (x_i, y_i)$ и $j = (x_j, y_j)$ задаётся функцией

$$f(i, j) = \rho^2(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2. \tag{1}$$

Возьмём на плоскости Евклида три произвольные точки i, j, k. Расстояния $f(i, j)$, $f(i, k)$, $f(j, k)$ между тремя произвольными точками i, j, k плоскости Евклида не связаны между собой никакой функциональной зависимостью. Однако, если вместо Евклидовой плоскости мы возьмём прямую L, то между этими расстояниями существует функциональная связь, выражаемая с помощью определителя Кели — Мэнгера порядка 4:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(i,j) & f(i,k) \\ 1 & f(i,j) & 0 & f(j,k) \\ 1 & f(i,k) & f(j,k) & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

где $f(ij) = x_i - x_j$. Возьмем на плоскости Евклида четыре произвольные точки: i, j, k, l, — и запишем для них шесть значений метрических функций (2): $f(i, j)$, $f(i, k)$, $f(i, l)$, $f(j, k)$, $f(j, l)$, $f(k, l)$. Хорошо известно, что шесть взаимных расстояний между любыми четырьмя точками евклидовой плоскости функционально связаны, обращая в нуль определитель

Кэли — Мэнгера порядка 5:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(i,j) & f(i,k) & f(i,l) \\ 1 & f(i,j) & 0 & f(j,k) & f(j,l) \\ 1 & f(i,k) & f(j,k) & 0 & f(k,l) \\ 1 & f(i,l) & f(j,l) & f(k,l) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Геометрический смысл состоит в том, что объём тетраэдра с вершинами, лежащими на плоскости, равен нулю.

В соответствии с терминологией, принятой в [1], соотношения (2) и (3), выражают феноменологическую симметрию Евклидовой плоскости и прямой.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \sigma \rangle$ — алгебра на основном множестве A, а $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ — совокупность всех её термальных операций.

Определение. Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ *феноменологически симметрична ранга 3*, если в $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ существуют такие термальные операции t_1, t_2, k (тернарная, бинарная и нулярная), для которых имеет место тождество:

$$t_1(t_2(x,y), t_2(x,z), t_2(y,z)) = k. \tag{4}$$

Из рассмотренных выше примеров и определения феноменологически симметричной алгебры, видно, что термальные операции t_2, t_1, k суть не что иное как метрическая функция, определитель Кэли — Мэнгера, причём $k = 0$. Термальные операции t_1, t_2, k, рассматриваемые вместе с основным множеством A, удовлетворяющие тождеству (4) образуют производную структуру — термальную алгебру. Таким образом, эта термальная алгебра есть не что иное, как геометрия исходной универсальной алгебры.

Полугруппой, как известно, называют алгебру с сигнатурой состоящей из одной бинарной операции, удовлетворяющей тождеству ассоциативности. Полугруппа, обладающая нейтральным элементом, есть моноид. Группой Клейна называют такую группу, в которой выполняется тождество

$$x^2 = e, \tag{5}$$

где e — её нейтральный элемент.

Легко показать, что всякий моноид с тождеством (1)) является группой Клейна.

Гомогруппой, называется такая полугруппа, у которой существует идеал, являющийся группой. Очевидно, что всякая группа является гомогруппой.

Пусть $\mathcal{N} = \langle A, \sigma = \{xy, k\}\rangle$ — алгебра, сигнатура σ которой состоит из бинарной ассоциативной операции xy и нулярной операции, фиксирующей некоторый, не обязательно нейтральный, элемент k, удовлетворяющих тождеству:

$$x^2 = k. \tag{6}$$

Через $\mathcal{N}(n)$ обозначим совокупность всех таких алгебр у которых мощность равна n, где n — любое натуральное число.

2 Некоторые теоремы для алгебр из $\mathcal{N}(n)$

Теорема 1. *$kx = xk$. Для любого $x \in \mathcal{N}$.*

Доказательство. Используем ассоциативность и тождество (6)):

$$xk = x(xx) = (xx)x = kx.$$

□

Теорема 2. *$k^m = k$, где m — любое натуральное число.*

Доказательство. Доказательство является простым следствием тождеств ассоциативности, (6)) и индукции по шагу m. □

Теорема 3. *Всякая алгебра из $\mathcal{N}(n)$ содержит подалгебру, которая является группой Клейна.*

Доказательство. Обозначим через I множество элементов вида: kx, где $x \in \mathcal{N}$. Очевидно, что $I \subseteq \mathcal{N}$ и является подалгеброй $\mathcal{N}$, поскольку, с учетом теоремы 2, $(kx)(ky) = kk(xy) = k(xy)$. Но если элемент k для всей алгебры $\mathcal{N}$ может не быть нейтральным, то для подалгебры I он точно является таковым, поскольку $(kx)k = k(kx) = kx$. Таким образом, подалгебра I, будучи моноидом с тождеством (6), является группой Клейна с константой k вместо единицы. □

Теорема 4. *Всякая алгебра из $\mathcal{N}(n)$ феноменологически симметрична ранга 3.*

Доказательство. Опираясь на теоремы 1, 2 и 3, имеем:

$$k = (kx)^2(ky)^2(kz)^2 = k(xy)k(xz)k(yz) = (xy)k(xz)(yz).$$

Так как $(xz)^2 = k$, в итоге получаем $(xy)(xz)^3(yz) = k$. Если в последнем равенстве положить $t_1(u, v, w) = uv^3w$, а $t_2(x, y) = xy$, то получим тождество (4), что и доказывает теорему. □

Теорема 5. *Подалгебра I является идеалом алгебры из $\mathcal{N}(n)$.*

Доказательство. Пусть $y \in N$, тогда $y(kx) = k(yx) \in I$, $(kx)y = k(xy) \in I$, то есть $NI \subseteq I$, $IN \subseteq I$. Что и доказывает теорему согласно определению идеала. □

Таким образом, из теоремы 1 и 5 следует, что алгебры из $\mathcal{N}(n)$ являются гомогруппами. Известны следующие результаты о гомогруппах [4]: если полугруппа обладает идеалом I, являющимся группой, то I содержится во всяком другом идеале этой полугруппы. Другими словами, I является минимальным идеалом в совокупности всех идеалов полугруппы, откуда следует, что полугруппа может иметь не более одного идеала, являющегося группой.

3 Классификация гомогрупп из $\mathcal{N}(n)$, для $n = 1, 2, 3$

Классификацию будем проводить, опираясь на понятие минимального идеала. По теореме 3, минимальные идеалы алгебр из $\mathcal{N}(n)$, будут группами Клейна. Группы Клейна хорошо изучены. Известно, что все группы Клейна одного порядка изоморфны между собой. Существуют группы Клейна порядка $2m$, где $m = 0, 1, 2, \dots$.

$n = 1$. Существует только одна одноэлементная алгебра рассматриваемой сигнатуры. Очевидно, что она является одноэлементной группой Клейна. Введём для неё обозначение I_1.

$n = 2$. Основное множество $A = \{k, a\}$. В этом случае, минимальными идеалами являются I_1 и группа Клейна порядка 2 (обозначим её через I_2):

I_1:

	k
k	k

I_2:

	k	a
k	k	a
a	a	k

В силу тождества (6)) и теоремы 5, в совокупности $\mathcal{N}(2)$ существует только одна 2-х элементная алгебра с идеалом I_1, таблица Кэли имеет вид:

	k	a
k	k	k
a	k	k

Для неё введём обозначение $\mathcal{N}_1^2$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Совокупность $\mathcal{N}(2)$ с точностью до изоморфизма состоит из гомогрупп $\mathcal{N}_1^2$ и I_2.*

$n = 3$. Основное множество $A = \{k, a, b\}$. Так как не существует группы Клейна порядка 3, минимальные идеалы алгебр из $\mathcal{N}(3)$ аналогичны минимальным идеалам алгебр из $\mathcal{N}(2)$.

Начнём классификацию с идеала I_1. Так как идеал I_1 одноэлементен, то в силу определения идеала неполная таблица Кэли принимает вид:

	k	a	b
k	k	k	k
a	k	k	
b	k		k

Существуют 9 вариантов заполнения пустых клеток и, следовательно, 9 группоидов, из которых, как легко проверить, только один является ассоциативным, а именно:

	k	a	b
k	k	k	k
a	k	k	k
b	k	k	k

Это так называемая трёхэлементная сингулярная полугруппа, которую обозначим через $\mathcal{N}_1^3$.

Классификация по идеалу I_2. В этом случае всякая алгебра из совокупности из $\mathcal{N}(3)$, минимальный идеал которой есть I_2, имеет таблицу Кэли, в которой некоторые элементы должны быть доопределены:

	k	a	b
k	k	b	
a	a	k	
b			k

По определению идеала, в пустых клетках могут быть только элементы идеала I_2. Можно показать, что в этом случае существуют 16 группоидов:

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	k
b	k	k	k

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	k
b	k	a	k

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	k
b	a	k	k

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	k
b	a	a	k

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	a
b	k	k	k

$\mathcal{N}_2^3$:

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	a
b	k	a	k

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	a
b	a	a	k

$\mathcal{N}_3^3$:

	k	a	b
k	k	a	k
a	a	k	k
b	a	k	k

$\mathcal{N}_4^3$:

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	k
b	k	k	k

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	k
b	k	a	k

$\mathcal{N}_5^3$:

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	k
b	a	k	k

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	k
b	a	a	k

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	a
b	k	k	k

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	a
b	k	a	k

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	a
b	a	a	k

	k	a	b
k	k	a	a
a	a	k	a
b	a	k	k

Без особого труда проверяется, что только четыре группоида, обозначенные через $\mathcal{N}_2^3$, $\mathcal{N}_3^3$, $\mathcal{N}_4^3$ и $\mathcal{N}_5^3$, принадлежат совокупности $\mathcal{N}(3)$, так как остальные оказываются неассоциативными. Таким образом, доказана следующая

Теорема 7. *Совокупность $\mathcal{N}(3)$ с точностью до изоморфизма содержит пять гомогрупп: $\mathcal{N}_1^3$, $\mathcal{N}_2^3$, $\mathcal{N}_3^3$, $\mathcal{N}_4^3$ и $\mathcal{N}_5^3$.*

Список литературы

[1] Yu.. I. Kulakov, Theory of physical structures, Publ. “Alfa-Wista”, Novosibirsk, 2003. (Russian)

[2] Yu. S. Vladimirov, Fundamentals of phisucs, Publ, “Binom”, Moscow, 2008. (Russian)

[3] G. G. Mikhaylichenko, Mathematical fundamentals and results in theory of physical structures, Publ. Gorno-Altaysk State Univ., Gorno-Altaysk, Russia, 2016. (Russian)

[4] E. S. Lyapin, Semigroups, Publ.“Fizmatgiz”, Moscow, 1960. (Russian)

АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ИЗОЛИРУЮЩИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ТЕОРИЙ ДЕКАРТОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРАФОВ

Д. Ю. Емельянов

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

1 Предварительные сведения

Определение 1.1. [4, 5, 6, 7, 8, 4]. Пусть T — полная теория, $\mathcal{M} \models T$. Рассмотрим типы $p(x), q(y) \in S(\emptyset)$, реализуемые в $\mathcal{M}$, а также всевозможные (p,q)-*устойчивые* или (p,q)-*полуизолирующие* формулы $\varphi(x,y)$ теории T, т.е. формулы, для которых найдутся элементы $a \in M$ такие, что $\models p(a)$ и $\varphi(a,y) \vdash q(y)$. Напомним, что если $\models p(a)$ и $\models \varphi(a,b)$ для (p,q)-полуизолирующей формулы $\varphi(x,y)$, то говорят, что *a полуизолирует b*. Определим для каждой такой формулы $\varphi(x,y)$ двухместное отношение $R_{p,\varphi,q} \rightleftharpoons \{(a,b) \mid \mathcal{M} \models p(a) \wedge \varphi(a,b)\}$. При условии $(a,b) \in R_{p,\varphi,q}$ пара (a,b) называется (p,φ,q)-*дугой*. Если $\varphi(a,y)$ — главная формула (над a), то (p,φ,q)-дуга (a,b) также называется *главной*.

Если $\varphi(x,y)$ является $(p \leftrightarrow q)$-*формулой*, т.е. одновременно (p,q)- и (q,p)-устойчивой, то множество $[a,b] \rightleftharpoons \{(a,b),(b,a)\}$ называется (p,φ,q)-*ребром*. Если (p,φ,q)-ребро $[a,b]$ состоит из главных (p,φ,q)- и (q,φ^{-1},p)-дуг, где $\varphi^{-1}(x,y)$ обозначает $\varphi(y,x)$, то $[a,b]$ называется *главным* (p,φ,q)-ребром.

Будем называть (p,φ,q)-дуги и (p,φ,q)-рёбра *дугами* и *рёбрами* соответственно, если из контекста ясно, о какой формуле идёт речь, или речь идёт о некоторой формуле $\varphi(x,y)$. Дуги (a,b), у которых пары (b,a) не являются дугами ни по каким (q,p)-формулам, будем называть *необращаемыми*.

Определение 1.2. [4, 10]. Для типов $p(x), q(y) \in S(\emptyset)$ обозначим через $\mathrm{PF}(p,q)$ множество

$$\{\varphi(x,y) \mid \varphi(a,y) \text{ — главная формула},$$

$$\varphi(a,y) \vdash q(y),\ \text{где}\ \models p(a)\}.$$

Пусть $\mathrm{PE}(p,q)$ — множество пар $(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ формул из $\mathrm{PF}(p,q)$ таких, что для любой (некоторой) реализации a типа p совпадают множества решений формул $\varphi(a,y)$ и $\psi(a,y)$.

Очевидно, что $\mathrm{PE}(p,q)$ является отношением эквивалентности на множестве $\mathrm{PF}(p,q)$. Заметим, что каждому $\mathrm{PE}(p,q)$-классу E соответствует либо главное ребро, либо необращаемая главная дуга, связывающая реализации типов p и q посредством любой (некоторой) формулы из E. Таким образом, фактор-множество $\mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ представляется в виде дизъюнктного объединения множеств $\mathrm{PFS}(p,q)$ и $\mathrm{PFN}(p,q)$, где $\mathrm{PFS}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих главным рёбрам, а $\mathrm{PFN}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих необращаемым главным дугам.

Множества $\mathrm{PF}(p,p)$, $\mathrm{PE}(p,p)$, $\mathrm{PFS}(p,p)$ и $\mathrm{PFN}(p,p)$ обозначаются соответственно через $\mathrm{PF}(p)$, $\mathrm{PE}(p)$, $\mathrm{PFS}(p)$ и $\mathrm{PFN}(p)$.

Зафиксируем полную теорию T, не имеющую конечных моделей. Пусть $U = U^- \dot\cup \{0\} \dot\cup U^+$ — некоторый алфавит мощности $\geq |S(T)|$, состоящий из *отрицательных элементов* $u^- \in U^-$, *положительных элементов* $u^+ \in U^+$ и нуля 0. Как обычно, будем писать $u < 0$ для любого элемента $u \in U^-$ и $u > 0$ для любого элемента $u \in U^+$. Множество $U^- \cup \{0\}$ обозначается через $U^{\leq 0}$, а $U^+ \cup \{0\}$ — через $U^{\geq 0}$. Элементы множества U будем называть *метками*.

Рассмотрим инъективные *меточные функции*

$$\nu(p,q)\colon \mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q) \to U,$$

$p(x), q(y) \in S(\emptyset)$, при которых классам из $\mathrm{PFN}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ соответствуют отрицательные элементы, а классам из $\mathrm{PFS}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ — элементы неотрицательные так, что значение 0 определяется лишь для $p = q$ и задаётся по формуле $(x \approx y)$, $\nu(p) \rightleftharpoons \nu(p,p)$. При этом будем считать, что $\rho_{\nu(p)} \cap \rho_{\nu(q)} = \{0\}$ для $p \neq q$ (где, как обычно, через ρ_f обозначается область значений функции f) и $\rho_{\nu(p,q)} \cap \rho_{\nu(p',q')} = \emptyset$, если $p \neq q$ и $(p,q) \neq (p',q')$. Любые меточные функции с указанными свойствами, а также семейства таких функций будем называть *правильными* и далее рассматривать только правильные меточные функции и их правильные семейства.

Через $\theta_{p,u,q}(x,y)$ будут обозначаться формулы из $\mathrm{PF}(p,q)$, представляющие метку $u \in \rho_{\nu(p,q)}$. Если тип p фиксирован и $p = q$, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y)$ обозначается через $\theta_u(x,y)$.

Отметим, что если $\theta_{p,u,q}(x,y)$ и $\theta_{q,v,p}(x,y)$ — формулы, свидетельствующие о том, что для реализаций a и b типов p и q соответственно пары (a,b) и (b,a) являются главными дугами, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y) \wedge \theta_{q,v,p}(y,x)$ свидетельствует о том, что $[a,b]$ является главным ребром. При этом *обратимой* метке u однозначно соответствует (неотрицательная) метка v и наоборот. Метки u и v будем называть *взаимно обратными* и обозначать через v^{-1} и u^{-1} соответственно.

Для типов $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\emptyset)$ и множеств меток $X_1, X_2, \ldots, X_k \subseteq U$ обозначим через

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

множество, состоящее из всех меток $u \in U$, соответствующих формулам $\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(x, y)$, которые для реализаций a типа p_1 и некоторых $u_1 \in X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, \ldots, u_k \in X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}$ удовлетворяют условию

$$\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(a, y) \vdash \theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(a, y),$$

где

$$\theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(x, y) \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons \exists x_2, x_3, \ldots, x_k(\theta_{p_1,u_1,p_2}(x, x_2) \wedge \theta_{p_2,u_2,p_3}(x_2, x_3) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \theta_{p_{k-1},u_{k-1},p_k}(x_{k-1}, x_k) \wedge \theta_{p_k,u_k,p_{k+1}}(x_k, y)).$$

Тем самым, на булеане $\mathcal{P}(U)$ множества U образуется *алгебра распределений бинарных изолирующих формул* с k-местными операциями

$$P(p_1, \cdot, p_2, \cdot, \ldots, p_k, \cdot, p_{k+1}),$$

где $p_1, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\emptyset)$. Эта алгебра имеет естественное обеднение на любое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$.

Очевидно, что биективно заменяя множество меток, мы получаем изоморфную алгебру. В частности, имеется *каноническая алгебра*, у которой метки представлены элементами

$$\bigcup_{p,q} \mathrm{PF}(p, q)/\mathrm{PE}(p, q).$$

Тем не менее, мы будем использовать абстрактное множество меток U, отражающее знаки меток и проясняющее алгебраические свойства операций на $\mathcal{P}(U)$.

Заметим, что если хотя бы одно из множеств X_i не пересекается с $\rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$ и, в частности, если оно пусто, справедливо равенство

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) = \emptyset.$$

Отметим также, что если $X_i \not\subseteq \rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$ для некоторого i, то

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) =$$

$$= P(p_1, X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, p_2, X_2 \cap \rho_{\nu(p_2,p_3)}, \ldots, p_k, X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}, p_{k+1}).$$

На основании последнего равенства в дальнейшем при рассмотрении значений

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

будем предполагать, что $X_i \subseteq \rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$, $i = 1, \ldots, k$.

Если каждое множество X_i состоит лишь из одного элемента u_i, то в записи

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

вместо множеств X_i будем использовать элементы u_i и писать

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}).$$

По определению справедливо следующее равенство:

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) =$$

$$= \cup\{P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}) \mid u_1 \in X_1, \ldots, u_k \in X_k\}.$$

Таким образом, задание множества

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

сводится к заданию множеств $P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$. Отметим также, что для любого множества $X \subseteq \rho_{\nu(p,q)}$ имеет место $P(p, X, q) = X$.

Заметим, что если $u_i = 0$, то $p_i = p_{i+1}$ для непустых множеств

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, 0, p_{i+1}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$$

и при этом выполняются следующие соотношения:

$$P(p_1, 0, p_1) = \{0\},$$

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, 0, p_{i+1}, u_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}) =$$
$$= P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, u_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}).$$

Если все типы p_i совпадают с типом p, то вместо записей

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

и

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$$

будем писать $P_p(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ и $P_p(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ соответственно, а также $\lfloor X_1, X_2, \ldots, X_k \rfloor_p$ и $\lfloor u_1, u_2, \ldots, u_k \rfloor_p$. Будем также опускать индексы $\cdot_p$, если из контекста ясно, о каком типе p идет речь. При этом вместо формул $\theta_{p,u_1,p,u_2,\ldots,p,u_k,p}(x, y)$ будем писать $\theta_{u_1,u_2,\ldots,u_k}(x, y)$.

При наличии модели $\mathcal{M}_p$ группоид $\mathfrak{P}_{\nu(p)} \rightleftharpoons \langle \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\emptyset\}; \lfloor\cdot,\cdot\rfloor\rangle$, будучи *полуассоциативной* (*слева*) *алгеброй*, позволяет представить всевозможные операции $\lfloor\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\rfloor$ термами сигнатуры $\lfloor\cdot,\cdot\rfloor$. В дальнейшем операцию $\lfloor\cdot,\cdot\rfloor$ будем также обозначать через $\cdot$ и использовать запись uv вместо $u\cdot v$. При этом в случае отсутствия полуассоциативности справа будем в записи $u_1u_2\ldots u_k$ предполагать следующую расстановку скобок: $(((u_1\cdot u_2)\cdot\ldots)\cdot u_k)$.

Поскольку по выбору метки 0 для формулы $(x\approx y)$ справедливы равенства $X\cdot\{0\}=X$ и $\{0\}\cdot X=X$ для любого $X\subseteq\rho_{\nu(p)}$, группоид $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ имеет единичный элемент $\{0\}$ и, при выполнении свойства полуассоциативности справа, является моноидом. В этой системе для любых множеств $Y,Z\in\mathcal{P}(\rho_{\nu(p)})\setminus\{\emptyset\}$ справедливо соотношение

$$Y\cdot Z=\bigcup\{yz\mid y\in Y, z\in Z\}. \tag{1}$$

Для семейства 1-типов $R\subset S(T)$ обозначим через I_R (в модели $\mathcal{M}$) множество

$$\{(a,b)\mid \mathrm{tp}(a),\mathrm{tp}(b)\in R \text{ и } a \text{ изолирует } b\},$$

а через SI_R (в модели $\mathcal{M}$) множество

$$\{(a,b)\mid \mathrm{tp}(a),\mathrm{tp}(b)\in R \text{ и } a \text{ полуизолирует } b\}.$$

Очевидно, что $I_R\subseteq\mathrm{SI}_R$ и на любом множестве реализаций типов из R отношения I_R и SI_R рефлексивны. Известно, что отношение полуизолированности на множестве кортежей произвольной модели транзитивно и, в частности, транзитивно любое отношение SI_R. Что касается отношения I_R, оно может быть как транзитивным, так и нетранзитивным:

Предложение 1.3. [4, 10]. *Пусть $p(x)$ — полный тип полной теории T, имеющей модель $\mathcal{M}_p$, $\nu(p)$ — правильная меточная функция. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отношение I_p (на множестве реализаций типа p в любой модели $\mathcal{M}\models T$) транзитивно;*

(2) *для любых меток $u_1,u_2\in\rho_{\nu(p)}$ множество $P_p(u_1,u_2)$ конечно.*

Предложение 1.4. [4, 10]. *Если $p,q\in R$ — главные типы, то $\rho_{\nu(p,q)}\cup\rho_{\nu(q,p)}\subseteq U^{\geq 0}$.*

Расширяя множество меток U положительными и отрицательными метками для полуизолирующих формул, а также *нейтральными* метками $u'\in U'$ (совмещающими необратимые дуги и главные ребра в множество решений полуизолирующих формул), получаем $\mathfrak{SI}_{\mathcal{R}}$-системы $\mathfrak{SI}$

для полуизолирующих формул, а также si-ранги, булевы операции на метках этих формул, отношения доминирования меток, соответствующие отношению $\vdash$, и POSTC$_{\mathcal{R}}$-системы, включающие все указанные атрибуты [4, 11].

Предложение 1.5. [4, 12]. *Для любой теории T, непустого семейства $R \subseteq S^1(\emptyset)$ изолированных типов и правильного семейства $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул* POSTC$_{\mathcal{R}}$*-система $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ состоит из положительных меток и нуля, и каждая метка u имеет дополнение $\bar{u}$ такое, что $u \wedge \bar{u} = \emptyset$ и $u \vee \bar{u}$ является максимальным элементом. Если $R = \{p\}$, то моноид $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(p)} = \langle M_{\nu(R)}, \cdot\rangle$ порождается булевой алгеброй, для которой $u \vee \bar{u}$ соответствует изолирующим формулам типа p.*

Следствие 1.6. [4, 12]. *Для любой ω-категоричной теории T, непустого семейства $R \subseteq S^1(\emptyset)$ и правильного семейства $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул* POSTC$_{\mathcal{R}}$*-система $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ конечна, состоит из положительных меток и нуля, и каждая метка u имеет дополнение $\bar{u}$.*

Теорема 1.7. [4, 12]. *Для любой* POSTC$_{\mathcal{R}}$*-системы $\mathfrak{M}$, у которой каждая метка положительная или нулевая и при этом имеет дополнение, существует теория T, непустое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$ изолированных типов и правильное семейство $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул такие, что $\mathfrak{M}_{\nu(R)} = \mathfrak{M}$.*

Следствие 1.8. [4, 12]. *Для любой конечной* POSTC$_{\mathcal{R}}$*-системы $\mathfrak{M}$, у которой любая метка положительна или нулевая и имеет дополнение, существует ω-категоричная теория T, непустое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$ и правильное семейство $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул такие, что $\mathfrak{M}_{\nu(R)} = \mathfrak{M}$.*

Замечание 1.9. . Отметим, что если $u_1, \ldots, u_n$ — все метки, связывающие реализации 1-типов p и q главными дугами, то для любой метки $u = u_{i_1} \vee \ldots \vee u_{i_k}$ её дополнением является метка $\bar{u} = u_{j_1} \vee \ldots \vee u_{j_l}$, где $\{i_1, \ldots, i_k\}, \{j_1, \ldots j_l\}$ — разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$. Поэтому в следствиях 1.6 и 1.8 о наличии дополнений можно не упоминать.

Кроме того, поскольку в любой конечной POSTC$_{\mathcal{R}}$-системе $\mathfrak{M}$ все метки сводятся к меткам изолирующих формул, эта система однозначно определяется своей подалгеброй распределений изолирующих формул.

2 Алгебры формул декартовых произведений

Определение 2.1. Декартово произведение или прямое произведение $G \times H$ графов G и H — это граф, такой что множество вершин графа $G \times H$ — это прямое произведение $V(G) \times V(H)$ любые две вершины (u, u') и (v, v') смежны в $G \times H$ тогда и только тогда, когда либо $u = v$ и u' смежна v' в H, либо $u' = v'$ и u смежна v в G.

Замечание 2.2. Алгебра графа ребра $\mathfrak{R}$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$\cdot$	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0\}$

Замечание 2.3. Алгебра для $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ даст алгебру для квадрата $\mathfrak{Q}$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1\}$
2	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{0, 2\}$

Замечание 2.4. Алгебра для $\mathfrak{Q} \times \mathfrak{R}$ даст алгебру для куба $\mathfrak{C}$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2, 3\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{0, 2\}$
2	$\{2\}$	$\{1, 3\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 3\}$
3	$\{3\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{0, 2\}$

Замечание 2.5. Алгебра для $\mathfrak{C} \times \mathfrak{R}$ даст алгебру для гиперкуба $\mathfrak{H}$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{0, 2, 4\}$	$\{1, 3\}$
2	$\{2\}$	$\{1, 3\}$	$\{0, 2, 4\}$	$\{1, 3\}$	$\{0, 2, 4\}$
3	$\{3\}$	$\{0, 2, 4\}$	$\{1, 3\}$	$\{0, 2, 4\}$	$\{1, 3\}$
4	$\{4\}$	$\{1, 3\}$	$\{0, 2, 4\}$	$\{1, 3\}$	$\{0, 2, 4\}$

Замечание 2.6. Алгебра $\mathfrak{H} \times \mathfrak{R}$ даст алгебру для пентеракта $\mathfrak{P}$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{5\}$
1	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{0,2,4\}$
2	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$
3	$\{3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$
4	$\{4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$
5	$\{5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$

Замечание 2.7. Алгебра $\mathfrak{P} \times \mathfrak{R}$ даст алгебру для хексеракта $\mathfrak{S}$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и задаваемую следующей таблицей:

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{1,3,5\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
1	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$
2	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$
3	$\{3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$
4	$\{4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$
5	$\{5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{1,3,5\}$
6	$\{6\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$

Заметим, что с каждым умножением диаметр увеличивается на единицу. В примере с кубом каждое увеличение диаметра влечет увеличение размерности. Под диаметром подразумевается понятие диаметра для графа. На основе рассмотренных ранее алгебр построим алгебру для n-мерного куба.

Обобщая вышеприведенные таблицы, получаем следующее утверждение:

Утверждение 2.8. *Алгебра для n-мерного куба, обозначаемого через $\mathfrak{Q}_\mathfrak{n}$, задается множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n\}$ и следующей таблицей Кэли:*

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\ldots$	m	l
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{\ldots\}$	$\{m\}$	$\{l\}$
1	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{\ldots\}$	$\{Nc_{(2m)}\}$	$\{C_{(2l)}\}$
2	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{\ldots\}$	$\{C_{(2m)}\}$	$\{Nc_{(2l)}\}$
3	$\{3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{Nc_{(2m)}\}$	$\{\ldots\}$	$\{Nc_{(2m)}\}$	$\{C_{(2l)}\}$
4	$\{4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{Nc_{(2m)}\}$	$\{C_{(2m)}\}$	$\{\ldots\}$	$\{C_{(2m)}\}$	$\{Nc_{(2l)}\}$
$\ldots$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$	$\{Nc_{(2m)}\}$	$\{C_{(2l)}\}$
m	$\{m\}$	$\{Nc_{(2m)}\}$	$\{C_{(2m)}\}$	$\{Nc_{(2m)}\}$	$\{C_{(2m)}\}$	$\{Nc_{(2m)}\}$	$\{C_{(2m)}\}$	$\{Nc_{(2l)}\}$
l	$\{l\}$	$\{C_{(2l)}\}$	$\{Nc_{(2l)}\}$	$\{C_{(2l)}\}$	$\{Nc_{(2l)}\}$	$\{C_{(2l)}\}$	$\{Nc_{(2l)}\}$	$\{C_{(2l)}\}$

где m — четное метка, l — нечетная метка, $\{Nc_{(x)}\}$ — нечетные метки до x, $\{C_{(x)}\}$ — четные метки до x.

Далее рассмотрим умножение для треугольника.

Замечание 2.9. Для алгебры треугольника $\mathfrak{T}$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1\}$ таблица Кэли имеет следующий вид:

$\cdot$	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1\}$

Замечание 2.10. При $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T} \times \mathfrak{R}$ получаем алгебру с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2\}$ и описываемую таблицей Кэли:

$\cdot$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1\}$	$\{0,2\}$

Замечание 2.11. Алгебра для $\mathfrak{T}_2$, после декартового умножения $\mathfrak{T}_2$ на граф $\mathfrak{R}$, задает алгебру для $\mathfrak{T}_3 = \mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{R}$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2,3\}$ и описываемую таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$
3	$\{3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$

Замечание 2.12. Алгебра для $\mathfrak{T}_4 = \mathfrak{T}_3 \times \mathfrak{R}$ является алгеброй с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2,3,4\}$ и описываемой таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$
3	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$
4	$\{4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$

Обобщая вышеприведенные таблицы, получаем следующее утверждение:

Утверждение 2.13. *Алгебра $\mathfrak{T}_n$ для n умножений алгебры $\mathfrak{T}$ на алгебру $\mathfrak{R}$ задается множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2,3,4,5,6,\dots,n\}$ с таблицей Кэли:*

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\dots$	n
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\dots$	$\{n\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,\dots,n\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,\dots,n\}$	$\dots$	$\{4\}$ $\dots,n\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,\dots,n\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,\dots,n\}$	$\dots$	$\{0,1,2,$ $\dots,n\}$
3	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,\dots,n\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,\dots,n\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,\dots,n\}$	$\dots$ $\dots$	$\{0,1,2,$ $\dots,n\}$
4	$\{4\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,\dots,n\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,\dots,n\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,\dots,n\}$	$\{0,1,2,3,$ $4,\dots,n\}$	$\dots$	$\{0,1,2,$ $\dots,n\}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$\{4\}$	$\{0,1,2,\dots,n\}$	$\{0,1,2,\dots,n\}$	$\{0,1,2,\dots,n\}$	$\{0,1,2,\dots,n\}$	$\dots$	$\{0,1,2,\dots,n\}$

Далее рассмотрим алгебры для пятиугольника с декартовым умножением.

Замечание 2.14. Построим алгебру для пятиугольника, обозначаемого через $\mathfrak{P}_1$, она будет описываться таблицей Кэли с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2\}$:

$\cdot$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 2\}$
2	$\{2\}$	$\{1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$

Замечание 2.15. Алгебра для $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{R}$ имеет множество меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2, 3\}$ и описывается таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$
2	$\{2\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$
3	$\{3\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$

Замечание 2.16. Алгебра для $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{R}$ имеет множество меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и описывается таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$
2	$\{2\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$
3	$\{3\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$
4	$\{4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$

Замечание 2.17. Построим алгебру для n умножений графа $\mathfrak{P}_1$ на $\mathfrak{R}$. Получаем граф $\mathfrak{P}_n$ с алгеброй, описываемой таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\ldots$	n
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{n\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$	$\ldots$	$\{4\} \ldots, n\}$
2	$\{2\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$	$\ldots$	$\{0, 1, 2, \ldots, n\}$
3	$\{3\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$	$\ldots$ $\ldots$	$\{0, 1, 2, \ldots, n\}$
4	$\{4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$	$\ldots$	$\{0, 1, 2, \ldots, n\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	$\{4\}$	$\{0, 1, 2, \ldots, n\}$	$\{0, 1, 2, \ldots, n\}$	$\{0, 1, 2, \ldots, n\}$	$\{0, 1, 2, \ldots, n\}$	$\ldots$	$\{0, 1, 2, \ldots, n\}$

Из сопоставления таблиц Кэли для алгебр графов $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}_n$ вытекает следующее:

Утверждение 2.18. *Алгебра, получаемая из n умножений графа $\mathfrak{P}_1$ на $\mathfrak{R}$, совпадает с алгеброй для $\mathfrak{P}_n$ из замечания* 2.17.

Список литературы

[1] P. S. Aleksandrov, Kombinatornaya topologiya, GITTL, 1947 (Russian).

[2] D. Yu. Emel'yanov, S. V. Sudoplatov, O determinirovannyh i pogloshchayushchih algebrah binarhyh formul poligonomertricheskih teorij, Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika, **20** (2017), 32–44 (Russian).

[3] D. Yu. Emel'yanov, Algebry raspredelenij binarnyh formul dlya teorij arhimedovyh tel, Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika, **28** (2019), 36–52 (Russian).

[4] A. Pillay, Countable models of stable theories, Proc. Amer. Math. Soc., **89**, 4(1983), 666–672.

[5] B. S. Baizhanov, Orthogonality of one types in weakly o-minimal theories, Algebra and Model Theory 2, Collection of papers, eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov, Novosibirsk: NSTU, 1999, 5–28.

[6] B. S. Baizhanov, B. Sh. Kulpeshov, On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories, Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference, eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono, Singapore, World Scientific: 2006, 31–40.

[7] S. V. Sudoplatov, Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories, J. Math. Sciences, **169**, 5 (2010), 680–695.

[8] B. S. Baizhanov, S. V. Sudoplatov, V. V. Verbovskiy, Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9**, 2012, 161–184.

[9] S. V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories, Novosibirsk: NSTU, 2018.

[10] I. V. Shulepov, S. V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 380–407.

[11] S. V. Sudoplatov, Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 408–433.

[12] S. V. Sudoplatov, Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories, International Mathematical Forum, **9**, 21 (2014), 1029–1033.

RANKS AND APPROXIMATIONS FOR FAMILIES OF ORDERED THEORIES

B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov*

Kazakh-British Technical University,
59 Tole bi st., Almaty, 050000, Kazakhstan,
Novosibirsk State Technical University,
20 K. Marx ave., Novosibirsk, 630073,
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4 Acad. Koptyug ave, Novosibirsk, 630090,
Novosibirsk State University,
1 Pirogov st., Novosibirsk, 630090
e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz, sudoplat@math.nsc.ru

Let L be a countable first order language. Throughout this article we consider L-structures and suppose that L contains a binary relation symbol $<$ which is interpreted in these structures as a linear order.

Let $\mathcal{T}$ be a family of complete theories of a fixed signature Σ, ϕ be an arbitrary Σ-sentence. Then the set $\mathcal{T}_\phi := \{T \in \mathcal{T} \mid \phi \in T\}$ is said to be *ϕ-neighborhood* of the family $\mathcal{T}$.

Definition 1. [8] Let $\mathcal{T}$ be a family of complete theories of a fixed signature Σ. Define the rank RS for the family of theories as follows:

(1) $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = -1$ if $\mathcal{T} = \emptyset$.

(2) $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = 0$ if $\mathcal{T}$ is a finite nonempty family.

(3) $\mathrm{RS}(\mathcal{T} \geq 1$ if $\mathcal{T}$ is infinite.

(4) $\mathrm{RS}(\mathcal{T} \geq \alpha + 1$ if there exist pairwise inconsistent Σ-sentences ϕ_n, $n \in \omega$ such that $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\phi_n}) \geq \alpha$.

(5) If δ is a limit ordinal then $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \delta$ if $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \beta$ for any $\beta < \delta$.

We put $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$ if $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha$ and $\neg[\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha + 1]$.

If $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) \geq \alpha$ for any α we put $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \infty$.

---

*This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132546), the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002, and Russian Foundation for Basic Researches (Project No. 17-01-00531-a).

A family $\mathcal{T}$ is called *e-totally transcendental*, or *totally transcendental*, if $\mathrm{RS}(\mathcal{T})$ is an ordinal. If $\mathcal{T}$ is totally transcendental, with $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \alpha \geq 0$, we define the *degree* $\mathrm{ds}(\mathcal{T})$ of $\mathcal{T}$ as the maximal number of pairwise inconsistent sentences ϕ_i such that $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\phi_i}) = \alpha$.

Clearly, if $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$ then $\mathrm{ds}(\mathcal{T}) \in \omega \setminus \{0\}$.

Lemma 2. *Let $\mathcal{T}$ be a family of complete theories of pure linear order, i.e. theories of linear order in the signature $\Sigma = \{<\}$. Then for any $\aleph_0$-categorical theory $T \in \mathcal{T}$ there exists a Σ-sentence ϕ such that $\mathcal{T}_\phi = \{T\}$, i.e.* $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\phi) = 0$ *and* $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_\phi) = 1$.

Proof of Lemma 2 is implied by finite axiomatizability of $\aleph_0$-categorical linear orders. □

Example 3. Let $\mathcal{T}$ be a family of complete theories of pure linear order. Consider the following sentence:

$$\phi := \forall x \forall y [x < y \to \exists t (x < t < y)].$$

Then we assert that $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\phi) = 0$ and $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_\phi) = 4$.

Indeed, consider the following sentences:

$$\phi_1 := \exists x \forall y [x \leq y] \wedge \forall x \exists y [x < y],$$

i.e. $\phi_1 -$ there exists the least element and there is no the greatest element.

$$\phi_2 := \exists x \forall y [x \geq y] \wedge \forall x \exists y [y < x]$$

i.e. $\phi_2 -$ there exists the greatest element and there is no the least element.

$$\phi_3 := \exists x \forall y [x \leq y] \wedge \exists x \forall y [x \geq y]$$

i.e. $\phi_3 -$ there exist both the greatest and the least elements.

$$\phi_4 := \forall x \exists y [x < y] \wedge \forall x \exists y [y < x]$$

i.e. $\phi_4 -$ there exist neither the greatest nor the least elements.

Obviously, all these sentences are pairwise inconsistent, exactly one of them holds, and for this $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\phi \wedge \phi_i}) = 0$ and $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_{\phi \wedge \phi_i}) = 1$ for every $1 \leq i \leq 4$.

Example 4. Let $\mathcal{T}$ be a family of complete theories of pure linear order. Consider the following formulas:

$$\psi := \exists x \forall y_1 \forall y_2 [x \leq y_1 < y_2 \to \exists t (y_1 < t < t_2)],$$

$$\theta(x) := \exists y [x < y \wedge \forall t (x \leq t \leq y \to x = t \vee t = y)] \vee$$

$$\vee \exists y[y < x \wedge \forall t(y \leq t \leq x \to y = t \vee t = x)],$$

$$C_\theta := \forall x \forall y[\theta(x) \wedge \theta(y) \wedge x < y \to \forall t(x \leq t \leq y \to \theta(t))] -$$

convexity of the formula $\theta(x)$.

$$M(x) := \forall y(x \leq y), \text{ i.e. } x \text{ is the least element.}$$

Let

$$\phi := \phi_1 \wedge \psi \wedge [\exists x \theta(x) \to \exists x(\theta(x) \wedge M(x)) \wedge C_\theta)],$$

where the sentence ϕ_1 is from the previous example.

Then we assert that $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\phi) = 1$ and $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_\phi) = 1$. Indeed, considering the sentences $\exists!^n x\theta(x)$ for every $n \geq 2$ we see that all these sentences are pairwise inconsistent, and $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\phi \wedge \exists!^n x\theta(x)}) = 0$ for every $n \geq 2$.

Example 5. Let $\mathcal{T}$ be a family of complete theories of pure linear order. Here we assume that the set of realizations of the formula $\theta(x)$ consists of at most two convex sets. Consider the following formulas:

$$C^2_\theta := \exists x \exists t \exists y(x < t < y \wedge \theta(x) \wedge \neg\theta(t) \wedge \theta(y) \wedge \forall z[x < z < y \wedge \theta(z) \to$$

$$\to (\forall u[x \leq u \leq z \to \theta(u)] \vee \forall u[z \leq u \leq y \to \theta(u)]]),$$

$$C^{\leq 2}_\theta := C_\theta \vee C^2_\theta, \quad \theta_1(x) := \theta(x) \wedge \forall y[y \leq x \to \theta(y)], \quad \theta_2(x) := \theta(x) \wedge \neg\theta_1(x).$$

Let

$$\phi := \phi_1 \wedge \psi \wedge [\exists x \theta(x) \to \exists x(\theta(x) \wedge M(x)) \wedge C^{\leq 2}_\theta)],$$

where the formulas $\phi_1, \psi, \theta(x), M(x), C^2_\theta$ are from the previous example.

Then we assert that $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\phi) = 2$ and $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_\phi) = 1$. Indeed, considering the sentences $\exists!^n x\theta_1(x) \wedge \exists!^m x\theta_2(x)$ for any $n, m \geq 2$, we see that all these sentences are pairwise inconsistent and $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\phi \wedge \exists!^n x\theta_1(x)}) = 1$,

$$\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\phi \wedge \exists!^n x\theta_1(x) \wedge \exists!^m x\theta_2(x)}) = 0$$

for any $n, m \geq 2$.

Example 6. Let $\mathcal{T}$ be a family of complete theories of pure linear order. Here we assume that the set of realizations of the formula $\theta(x)$ consists of at most n convex sets ($n \geq 2$), i.e. $\theta(x) := \vee_{i=1}^n \theta_i(x)$, every $\theta_i(x)$ is convex, and all they are pairwise inconsistent. Consider the following formulas:

$$C^{\leq n}_\theta := C_\theta \vee C^2_\theta \vee \ldots \vee C^n_\theta.$$

Let $\phi := \phi_1 \wedge \psi \wedge [\exists x\theta(x) \to \exists x(\theta(x) \wedge M(x)) \wedge C^{\leq n}_\theta)]$, where the formulas $\phi_1, \psi, \theta(x), M(x), C^2_\theta$ are from the previous examples.

Then we assert that $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\phi) = n$ and $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_\phi) = 1$. Indeed, here we consider the sentences $\exists!^{m_i} x\theta_i(x)$ for every $1 \le i \le n$, where $m_i \ge 2$. We can observe that the sentences of the form $\wedge_{i=1}^{n} \exists!^{m_i} x\theta_i(x)$ are pairwise inconsistent, and for any $m_1, \ldots, m_n \ge 2$ the following holds:

$$\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\phi\wedge\wedge_{i=1}^{n}\exists!^{m_i}x\theta_i(x)}) = 0,\ \ \mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\phi\wedge\wedge_{i=1}^{n-1}\exists!^{m_i}x\theta_i(x)}) = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\phi\wedge\exists!^{m_1}x\theta_1(x)\wedge\exists!^{m_2}x\theta_2(x)}) = n-2,\ \ \mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\phi\wedge\exists!^{m_1}x\theta_1(x)}) = n-1.$$

Thus, we established the following proposition:

Proposition 7. *Let $\mathcal{T}$ be a family of complete theories of pure linear order. Then for every $n < \omega$ there exists a sentence ϕ such that $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\phi) = n$.*

Definition 8. [31] Let $\mathcal{T}$ be a family of theories and T be a theory such that $T \notin \mathcal{T}$. The theory T is said to be *$\mathcal{T}$-approximated*, or *approximated* by the family $\mathcal{T}$, or a *pseudo-$\mathcal{T}$-theory*, if for any formula $\varphi \in T$ there exists $T' \in \mathcal{T}$ for which $\varphi \in T'$.

If the theory T is $\mathcal{T}$-approximated, then $\mathcal{T}$ is said to be an *approximating family* for T, and theories $T' \in \mathcal{T}$ are said to be *approximations* for T.

The following definitions are partial cases of $\mathcal{T}$-approximability.

Definition 9. [28, 15, 16, 17]. An infinite structure $\mathcal{M}$ is said to be *pseudofinite* if any sentence holding in $\mathcal{M}$ has a finite model.

If $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ for a pseudofinite structure $\mathcal{M}$, then the theory T is also said to be *pseudofinite*.

Definition 10. The theory T of an infinite non-$\aleph_0$-categorical structure $\mathcal{M}$ is said to be *pseudo-$\aleph_0$-categorical* if any sentence holding in $\mathcal{M}$ has an $\aleph_0$-categorical model $\mathcal{N}$. And these models $\mathcal{N}$ are said to be *approximations* of the model $\mathcal{M}$.

Theorem 11. *The theory T of an infinite linearly ordered structure $\mathcal{M} = \langle M; < \rangle$ is pseudofinite iff $\mathcal{M}$ has no dense parts and $\mathcal{M}$ has both the greatest and least elements.*

Proof. If $\mathcal{M}$ has dense parts then the following sentence holds in $\mathcal{M}$:

$$\exists x \exists y (x < y \wedge \forall z_1 \forall z_2 ((x < z_1 \wedge z_1 < z_2 \wedge z_2 < y) \to \exists u (z_1 < u \wedge u < z_2))).$$

Obviously, this sentence holds only in infinite models. Therefore, the theory T is not pseudofinite. An existence of both the greatest and least elements in finite approximations of the model $\mathcal{M}$ implies an existence of such elements in the model $\mathcal{M}$.

Suppose now that $\mathcal{M}$ has no dense parts and $\mathcal{M}$ has both the greatest and least elements. This means that the order on $\mathcal{M}$ is discrete and is approximated by finite linear orderings, i.e. $\mathcal{M}$ is pseudofinite. □

Remark 12. Observe that infinite discrete orderings are not approximated by countably categorical structures since the countable categoricity implies an existence of dense parts. Thus, discrete orderings having no either endpoint are not approximated either by finite or by countably categorical orderings. Moreover, the theories of such orderings are not approximated since they are finitely axiomatizable by sentences describing a linearity of orderings, an existence of an immediate successor for every non-maximal element, and an existence of an immediate predecessor for every non-minimal element.

Theorem 13. *Any theory T of an infinite linearly ordered set $\mathcal{M} = \langle M; < \rangle$ non-being countably categorical is pseudo-$\aleph_0$-categorical if and only if $\mathcal{M}$ has at least one dense part and every discrete part has both the least and greatest elements.*

Proof. The structure $\mathcal{M}$ is formed by infinitely many alternations of discrete and dense parts. And by Remark 12 at least one dense part must be in $\mathcal{M}$ for pseudo-$\aleph_0$-categoricity. Moreover, since in countably categorical linear orderings any discrete part is finite with the least and greatest elements, every discrete part in the structure $\mathcal{M}$ contains endpoints.

Now, having both a dense part and a least and greatest elements in each discrete part of the structure $\mathcal{M}$ we can construct step by step a family $\mathcal{T}$ of theories of countably categorical orderings by increasing configurations of discrete and dense parts so that each sentence of the theory T describing configurations of models of the theory T belonged some theory from $\mathcal{T}$. Indeed, in dependence of cardinalities of discrete parts of models of the theory $\mathcal{T}$ we can construct a sequence of countably categorical structures composed of structures of the form

$$n_0 + \mathbb{Q} + n_1 + \mathbb{Q} + \ldots + n_{k-1} + \mathbb{Q} + n_k, \qquad (1)$$

$n_i \in \omega$, preserving or unrestrictedly increasing values n_i in dependence of that whether the corresponding parts are finite, cardinality n_i, or infinite, and also preserving or unrestrictedly increasing the number k in dependence of that whether the number of discrete parts in the structure $\mathcal{M}$ is finite or infinite. □

Theorem 14. [8] *For any family $\mathcal{T}$, $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \mathrm{RS}(\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}))$ and if a family $\mathcal{T}$ is nonempty and e-totally transcendental then $\mathrm{ds}(\mathcal{T}) = \mathrm{ds}(\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}))$.*

Theorem 15. [8] *For any family $\mathcal{T}$ satisfying the inequality $|\Sigma(\mathcal{T})| \leq \omega$ the following conditions are equivalent:*
(1) $|\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})| = 2^\omega$*;*
(2) e-$\mathrm{Sp}(\mathcal{T}) = 2^\omega$*;*
(3) $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \infty$*.*

Observe that the family $\mathcal{T}_{\mathrm{cclo}}$ of all theories of countably categorical linear orderings allows to approximate arbitrary alternations of discrete and dense parts. Varying cardinalities of discrete parts and unrestrictedly increasing the number k in structures of the form 1 we obtain continuum many pseudo-$\aleph_0$-categorical theories and for this each function $f \in 2^\omega$ with values $f(i) = n_i$ has an own theory. Thus, by Theorems 14 and 15 the following holds:

Proposition 16. $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\mathrm{cclo}}) = \infty$.

Theorem 17. [10] *Let $\mathcal{T}$ be a family of theories of a countable signature Σ with $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \infty$, α be a countable ordinal, $n \in \omega \setminus \{0\}$. Then there exists a d_∞-definable subfamily $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$ for which $\mathrm{RS}(\mathcal{T}^*) = \alpha$ and $\mathrm{ds}(\mathcal{T}^*) = n$.*

By Proposition 16 and Theorem 17 the following holds:

Corollary 18. *For any countable ordinal α and natural $n \in \omega \setminus \{0\}$ there exists a subfamily $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}_{\mathrm{cclo}}$ such that $\mathrm{RS}(\mathcal{T}^*) = \alpha$ and $\mathrm{ds}(\mathcal{T}^*) = n$.*

Recall that an *open interval* in a linearly ordered structure M is a parametrically definable subset of M of the form $I = \{c \in M : M \models a < c < b\}$ for some $a, b \in M \cup \{-\infty, \infty\}$ with $a < b$. Similarly, we may define *closed, half open-half closed*, etc., *intervals* in M. An arbitrary point $a \in M$ can also be represented as the interval $[a, a]$. By an *interval* in M we shall mean, ambiguously, any interval in M of a type above. A subset A of a linearly ordered structure M is *convex* if for all $a, b \in A$ and $c \in M$ whenever $a < c < b$ we have $c \in A$. Recall also the notion of *weak o-minimality* which was initially studied in [18]. A *weakly o-minimal structure* is a linearly ordered structure $\mathcal{M} = \langle M, =, <, \ldots\rangle$ such that any definable (with parameters) subset of M is a union of finitely many convex sets in $\mathcal{M}$. We recall that such structure $\mathcal{M}$ is said to be *o-minimal* if any definable (with parameters) subset of M is a union of finitely many intervals and points in $\mathcal{M}$. Thus, weak o-minimality generalizes the notion of o-minimality. Real closed fields with a proper convex valuation ring provide an important example of weakly o-minimal (not o-minimal) structures.

Now we recall that ω represents the ordering of the natural numbers, ω^* the reverse ordering on the natural numbers, and $\mathbb{Q}$ the ordering of the rational numbers. Let F be the set of all finite linear orders, and

$$G := F \cup \{\omega, \omega^*, \omega + \omega^*, \omega^* + \omega, \mathbb{Q}\}.$$

Also, let WO be the collection of all ordered sums of the form $C_1 + \ldots + C_m$, where C_i is elementarily equivalent to some member of G for each $i \leq m$.

Theorem 19. [19] *Any weakly o-minimal structure M restricted to the signature $\{<, =\}$ is a member of WO, and conversely, the first-order theory of any member of WO is a weakly o-minimal theory of linear order.*

Denote by $\mathcal{T}_{\rm womlo}$ the family of all weakly o-minimal theories of pure linear order.

Corollary 20. $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\rm womlo}) = \infty$.

Proof of Corollary 20. By Theorem 19 the number of convex discrete and dense parts must be finite, but for this their number can be arbitrarily large for a fixed weakly o-minimal theory. Consequently, there are continuum many pseudo-$\mathcal{T}$-theories by means of infinite alternations of different discrete and dense parts. Then by Theorems 14 and 15 we have $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \infty$. □

Repeating the arguments for Corollary 18, we obtain:

Corollary 21. *For any countable ordinal α and natural $n \in \omega \setminus \{0\}$ there exists a subfamily $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}_{\rm womlo}$ at which* $\mathrm{RS}(\mathcal{T}^*) = \alpha$ *and* $\mathrm{ds}(\mathcal{T}^*) = n$.

Since the equality $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \infty$ means an existence of a 2-tree of sentences [9] and for any expansion this 2-tree is preserved an arbitrary expansion of the family $\mathcal{T}$ to the family $\mathcal{T}'$ of a signature $\Sigma \supseteq \Sigma(\mathcal{T})$ satisfies the condition $\mathrm{RS}(\mathcal{T}') = \infty$. Thus, by Corollary 20 the following theorem holds.

Theorem 22. *For any signature Σ including the relation symbol $<$ for a linear order the family $\mathcal{T}_{\rm wom,\Sigma}$ of all weakly o-minimal theories of the signature Σ is not e-totally transcendental:* $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\rm wom,\Sigma}) = \infty$.

References

[1] S. V. Sudoplatov, Combinations of structures, The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics", **24** (2018), 65–84.

[2] S. V. Sudoplatov, Closures and generating sets related to combinations of structures, The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics". **16**(2016), 131–144.

[3] S. V. Sudoplatov, Families of language uniform theories and their generating sets, The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics", **17**(2016), 62–76.

[4] S. V. Sudoplatov, Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14**(2017), 135–150.

[5] S. V. Sudoplatov, Relative e-spectra and relative clos/ures for families of theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14**(2017), 296–307.

[6] S. V. Sudoplatov, On semilattices and lattices for families of theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14**(2017), 980–985.

[7] S. V. Sudoplatov, Approximations of theories, `arXiv:1901.08961v1 [math.LO]`, 2019, 16 p.

[8] S. V. Sudoplatov, Ranks for families of theories and their spectra, `arXiv:1901.08464v1 [math.LO]`, 2019, 17 p.

[9] N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, Ranks for families of all theories of given languages, `arXiv:1901.09903v1 [math.LO]`, 2019, 9 p.

[10] N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, Definable subfamilies of theories, related calculi and ranks, `arXiv:1901.08961v1 [math.LO]`, 2019, 20 p.

[11] N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, Algebras for definable families of theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 600–608.

[12] N. D. Markhabatov, Ranks for families of permutation theories, The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, **28** (2019), 86–95.

[13] In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov, Ranks for families of theories of abelian groups, The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, **28** (2019), 96–113.

[14] E. Rosen, Some Aspects of Model Theory and Finite Structures, The Bulletin of Symbolic Logic, **8**, 3(2002), 380–403.

[15] J. Väänänen, Pseudo-finite model theory, Matematica Contemporanea, **24** (2003), 169–183.

[16] G. Cherlin, E. Hrushovski, Finite Structures with Few Types, Annals of Mathematics Studies No. 152, Princeton, Oxford : Princeton University Press, 2003.

[17] H. D. Macpherson, Ch. Steinhorn, Definability in the classes of finite structures, Finite and Algorithmic Model Theory. London Matheematical Society Lecture Notes series: 379, eds.: J. Esparza,

C. Michaux, Ch. Steinhorn. — Cambridge : Cambridge University Press, 2011, 140–176.

[18] H. D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly *o*-minimal structures and real closed fields, Transactions of The American Mathematical Society, **352**, 12(2000), 5435–5483.

[19] B. Sh. Kulpeshov, Weakly *o*-minimal structures and some of their properties, The Journal of Symbolic Logic, **63**(1998), 1511–1528.

PSEUDOFINITENESS OF LOCALLY FREE ALGEBRAS

N. D. Markhabatov*

Novosibirsk State Technical University,
20 K. Marx ave., Novosibirsk, 630073, Russia
e-mail: nur_24.08.93@mail.ru

Keywords: pseudo-finite theory, locally free algebra, unar, groupoid.

In this paper, we consider locally free algebras. The fundamental results on locally free algebras are presented in [1, 2]. In the work of Ax [3] the concept of pseudofiniteness was first defined. The foundamental works [4, 5, 6, 7, 8] obtained to date for pseudo-finite structures directly depend on the results of Ax.

1 Pseudofinite structures

In this section, we introduce some definitions and notation from [7, 8, 31, 10] which we will need in the future.

Definition 1.1. [7, 8]. The basic definitions of pseudofiniteness are as follows.

- An L-structure M is *pseudofinite* if for all L-sentences φ, $M \models \varphi$ implies there is a finite M_0 such that $M_0 \models \varphi$. M is *strictly pseudofinite* if M is pseudofinite and not finite.
- A consistent L-theory T is *weakly pseudofinite* if φ is true in some finite structure (not necessarily a model of T)whenever $T \models \varphi$.
- T is *strongly pseudofinite* if there exists a finite model M_0 such that $M_0 \models \varphi$ whenever φ is consistent with T.

For example, the empty theory is weakly pseudofinite but not strongly pseudofinite.

*This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP05132349, AP05132546) and Russian Foundation for Basic Researches (Project No. 17-01-00531-a).
Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C15, 03C50, 03F03, 54A05.

Definition 1.2. Fixing a language L, T_f is the common theory of all finite L-structures. That is, $\varphi \in T_f$ if and only if φ is true of every finite L-structure.

There are other, equivalent definitions of pseudofiniteness, as the following result describes:

Proposition 1.3. [7, 8] *Fix a language L and an L-structure M. Then the following are equivalent:*
1. an L-structure M is pseudofinite;
2. $M \models T_f$;
3. M is elementarily equivalent to an ultraproduct of finite L-structures.

Proposition 1.4. [8] *Let M be a pseudo-finite structure and $f : M^k \to M^k$ be a definable function. Then f is injective if and only if f is surjective.*

We denote by $\overline{\mathcal{T}}$ the class of all complete elementary theories, by $\overline{\mathcal{T}}_{fin}$ the subclass of $\overline{\mathcal{T}}$ consisting of all theories with finite models.

Proposition 1.5. [31] *For any theory T the following conditions are equivalent:*
(1) T is pseudo-finite;
(2) T is $\overline{\mathcal{T}}_{fin}$-approximated;
(3) $T \in Cl_E(\overline{\mathcal{T}}_{fin}) \setminus \overline{\mathcal{T}}_{fin}$.

Let the signature Σ consist of a permutation f and let T be the theory of permutations.

Theorem 1.6. [10] *Any theory T of a permutation on an infinite set is pseudofinite.*

2 Locally free algebras

We fix some functional signature

$$\Sigma = \langle f_1^{(n_1)}, \ldots, f_r^{(n_r)}, \ldots; c_0, \ldots, c_k, \ldots \rangle.$$

By $T(\Sigma)$ we denote the set of all terms of this signature over the set of variables $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Definition 2.1. [11] On the set $T(\Sigma)$ we can determine the action of the signature functions $f_i^{s_i}$ by setting the value of the function f_i on the elements $t_1(\bar{x}_1), \ldots, t_{s_i}(\bar{x}_{s_i})$ equal to the term $f_i(t_1(\bar{x}_1), \ldots, t_{s_i}(\bar{x}_{s_i}))$. Interpreting the constant symbols c_i of the signature Σ by these constants c_i themselves in $T(\Sigma)$ we obtain the algebra of the signature Σ with the basic set $T(\Sigma)$.

We call this algebra *absolutely free algebra of signature* Σ and denote it by $F(\Sigma) = \langle T(\Sigma); \Sigma\rangle$. Obviously, the algebra $F(\Sigma)$ is generated by the set X.

Let $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma\rangle$ be an arbitrary algebra of signature σ and ψ be some mapping of the set X to the set A. This mapping ψ admits an extension to some homomorphism φ_ψ of the algebra $F(\Sigma)$ into the algebra $\mathfrak{A}$ that is there exists a homomorphism φ_ψ of the algebra $F(\Sigma)$ into the algebra $\mathfrak{A}$, coinciding with the map ψ on the set $X \subseteq F(\Sigma)$. The map $\varphi_\psi : T(\Sigma) \to A$ is defined in the following natural way:

$$\varphi_\psi(t(x_1, \dots, x_n)) = t_{\mathfrak{A}}(\psi(x_1), \dots, \psi(x_n)),$$

where $t(x_1, \dots, x_n)$ denotes an arbitrary term of the signature Σ and $t_{\mathfrak{A}}(x_1, \dots, x_n)$ is a thermal function of the algebra $\mathfrak{A}$ corresponding to the term $t(x_1, \dots, x_n)$. The mapping φ_ψ is a homomorphism of the algebra $F(\Sigma)$ into the algebra $\mathfrak{A}$ continuing the mapping ψ. A similar homomorphism (of the algebra $F(\Sigma)$ to the algebra $\mathfrak{A}$ continuing the mapping ψ) is unique.

From this, in particular, it follows that any no more than countable algebra of signature Σ is isomorphic to some factor algebra of the absolutely free algebra $F(\Sigma)$. Indeed, let $\mathfrak{A} = \langle A, \Sigma\rangle$ be finite or countable, let ψ be an arbitrary mapping of the set X onto the set A. In this case, the homomorphism φ_ψ of the algebra $F(\Sigma)$ into the algebra $\mathfrak{A}$ described above will be an epimorphism. Thus, if θ is the kernel of the homomorphism φ_ψ, then $\mathfrak{A} \cong F(\Sigma)/\theta$. Choosing different mappings of the set X onto A we obtain various representations of the algebra $\mathfrak{A}$ in the form of factor algebras of the algebra $F(\Sigma)$. All algebras isomorphic to $\mathfrak{A}$ are also absolutely free.

Definition 2.2. *[1, 2]* An algebra is called *locally free* if each its finitely generated subalgebra is free. A free algebra is an algebra isomorphic to the algebra of all terms.

From the above construction it is clear that in absolutely free algebras of signature Σ the following axioms are true:
i) $f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = f_i(y_1, \dots, y_{n_i}) \to x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_{n_i} = y_{n_i}$ $i = 1, \dots, s$;
ii) $f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \neq f_j(y_1, \dots, y_{n_i})$ $i \neq j, i, j = 1, \dots, s$;
iii) $\varphi(x, x_1, \dots, x_m) \neq x$, where φ is a term of length strictly greater than 1 and different from x, in fact containing the variable x.

Theorem 2.3. [1, 2] *In order to algebra the signature Σ was locally absolutely free, it is necessary and sufficient that the axioms* (i, ii, iii) *are true in it.*

Theorem 2.3 implies that the class of all locally absolutely free algebras is axiomatizable.

Theorem 2.4. [2] *The theory of locally free algebra of infinite signature is complete.*

3 Pseudofiniteness of locally free algebras

Let T be a complete first-order theory of locally free algebras of signature $\Sigma = \{f_1^{(n_1)}, \dots, f_r^{(n_r)}, \dots; c_1, \dots, c_k, \dots, \}$.

Proposition 3.1. *If the signature Σ consists of constant symbols, or of constant symbols and one unary functional symbol, then the locally free algebra A is pseudofinite.*

Proof. Let $\Sigma = \{c_1, \dots, c_k\}$. These constants correspond to some elements (terms) $\{a_1, \dots, a_k\}$ which freely generate the algebra A. We can write through sentences $c_i \approx c_j$ or $\neg c_i \approx c_j$. Since these sentences hold for A and for some finite algebra by definition A is pseudofinite.

Now, let $\Sigma = \{f^{(1)}, c_1, \dots, c_k\}$. Since, different terms correspond to different elements, each element has no more than one preimage. Therefore, the map $f^{(1)} : A \to A$ is bijective, and A is pseudofinite. Therefore, the theory $\mathrm{Th}(A)$ is pseudofinite. As in [10, Theorem 6], the models of the theory $\mathrm{Th}(A)$ form infinite magistrals that can be approximated by finite structures. $\square$.

Example 3.2. An important example of free unary algebra arises from the group homomorphism $\varphi : G \to S_A$ of an arbitrary group G into the group of all permutations of the set A. Such homomorphism is called the action of the group G over A. The definition for each element $g \in G$ of the unary operation $f_g : A \to A$ as a permutations of $\varphi(g)$ in S_A for the corresponding element g under the homomorphism φ gives a free unary algebra $\langle A, \{f_g^{(1)} \mid g \in G\}\rangle$ in which $f_1(x) = x, f_g(f_h(x)) = f_{gh}(x), x \in A, g, h \in G$. Using the arguments of [10, Theorem 6] we see that such algebra can be approximated by finite structures. Thus, the free unary algebra $\langle A, \{f_g^{(1)} \mid g \in G\}\rangle$ is pseudofinite.

Theorem 3.3. *An infinite locally free algebra A is pseudofinite if and only if the signature contains no more than one unary symbol and does not contain symbols arity $n > 1$.*

Proof. ($\Rightarrow$) Assume that the infinite locally free algebra A is pseudofinite and $\Sigma = \{f_1^{(1)}, f_2^{(1)}\}$. We fix a positive positive integer n and choose an arbitrary sentence φ from the theory $\mathrm{Th}(A)$, which describes, according to axioms i)-iii) the relationship among the values of the terms of the signature Σ containing at most n signature symbols. Consider a finite algebra B of the least possible cardinality s in which the sentence φ holds. Since B is finite some values of different terms with functional symbols turn out to be equal which implies the equality of terms of shorter lengths from axioms i) and ii). This contradicts the minimality of the choice of s. Therefore, the algebra A is not pseudofinite.

Now consider a locally free algebra A of a signature $\Sigma = \{g^{(n)}\}$ for $n \geq 2$. To approximate the algebra $\mathfrak{A}$ by finite algebras it is necessary to set cycles of unbounded length. Consider the following functions:

$$g_1(x) = g(g(x,x), x, x, \ldots, x),$$

$$g_2(x) = g(x, g(x,x), x \ldots, x).$$

Using axioms i) we obtain

$$g(g(x,x), x, x, \ldots, x) = g(x, g(x,x), x, \ldots, x) \to g(x,x) = x.$$

This shows that if there are two different operations g_1 and g_2 during cycling they are identified which contradicts the locally freedom of the algebra A. Hence, a locally free algebra with one functional symbol of arity ≥ 2 is not pseudofinite.

($\Leftarrow$) Let $\Sigma = \{c_1, \ldots, c_k\}$ or $\Sigma = \{f^{(1)}, c_1, \ldots, c_k\}$. Then by Proposition 3.1, the locally free algebra A of signature Σ is pseudofinite. □

Corollary 3.4. *A locally free groupoid is not pseudofinite.*

References

[1] A. I. Mal'tsev, Axiomatizable Classes of Locally Free Algebras of Some Types, Sib. Mat. Z., **3**, 5 (1962), 729–743 (Russian).

[2] O. V. Belegradek, Theory of Locally Free Algebras, Model Theory and its Applications, American Mathematical Society translations, **195**, 2 (1999), 117–143.

[3] J. Ax, The elementary theory of finite fields, Ann. Math. **88** (1968), 239–271.

[4] Z. Chatzidakis, Model theory of finite fields and pseudofinite fields, Ann. Pure Appl. Logic, **88** (1997), 95–108.

[5] J. Väänänen, Pseudo-finite model theory, Matematica Contemporanea, **24** (2003), 169–183.

[6] E. Rosen, Some Aspects of Model Theory and Finite Structures, The Bulletin of Symbolic Logic, **8**, 3 (2002), 380–403, https://doi.org/10.2178/bsl/1182353894.

[7] A. Pillay, Strongly minimal pseudofinite structures, http://arxiv.org/abs/1411.5008, 2014.

[8] D. Garcia, Minicourse on model theory of pseudofinite structures: Trimester programme Model Theory, Valued Fields and Combinatorics. Institut Henri Poincare. Feb 8–9, 2016. available at: http://www1.maths.leeds.ac.uk/ pmtdg/NotesIPM.pdf.

[9] S. V. Sudoplatov, Approximations of theories, arXiv:1901.08961v1 [math.LO], 2019, available at: https://arxiv.org/abs/1901.08961

[10] N. D. Markhabatov, Ranks for Families of Permutation Theories, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **28** (2019), 85–94. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.85

[11] A. G. Pinus, Osnovy universalnoi algebry, 4-e izd.,pererab. i dop. — Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2019, 184 p. (Russian).

ON ARGUMENTS, FALLACIES AND CRITICAL VALIDITY

M. Mpournazos **P. Stefaneas**

Department of Mathematics,
School of Applied Mathematical and Physical Sciences,
National Technical University of Athens,
Heroon Polytechniou 9,
15780 Zografou, Greece

e-mail: matbournazos@gmail.com
e-mail: petros@math.ntua.gr

1 Introduction

Logical validity is often perceived as the sole criterion for an argument to be considered "correct", so much so that, in most cases, it is mentioned simply as "validity". This conception regarding argument "correctness" has lead most proposals for a mathematical formalism of argumentation since the 80's. Based upon a conceptualization of argumentation which considers arguments to be

"... a sequence of inferences leading to a conclusion."[1], or, what could be more loosely described as "... valid patterns of inference."[2] this notion of validity underlies many[3] (if not all) of proposals for a mathematical definition of the notion of argument.

However, intuitive as it may seem, viewing arguments as sequences of logically valid inferences, imposes two unnecessary restrictions over the range of the notion. These restrictions are deemed to be unnecessary because they emanate neither from the empirical nor from the theoretical studies in the field of argumentation. On the one hand, as Stephen Toulmin made clear, there have been traditions [4] in the theory of argumentation whose

[1]See [5], page 428.

[2]See [3], page 337.

[3]As some well known examples of such oriented approaches, see the definitions of argument proposed by (1) Besnard and Hunter in [1] (page 39), by (2) Fox, Krause and Elvang-Gøransson in [5] (page 429) and by (3) Pollock in [6], (pages 368–370)

[4]Specifically, besides logical validity, Toulmin "locates" two more versions of validity, a critical and an anthropological one. He then uses this characteristic, in order to divide the various models of argumentation which have been proposed over the centuries into the three categories of logical, dialectical and rhetorical tradition. From the two aforementioned kinds of non-logical validity, we shall focus in this paper on the former.

"arguments" answer to versions of validity which are substantially different from logical validity. On the other hand, by defining arguments as valid inferences, we end up with a formalism that is unable to express the concept of fallacy, at least in a form which would allow for the specification of the fallacious part of the reasoning.

In this short paper, we present a mathematical formalism of argumentation in which arguments "answer" to a critical validity, where an argument is considered valid if it defends some standpoint against some criticism. The results of this paper form a part of the diploma thesis of M. Bournazos [2].

2 Critical Validity

Argumentation in AI may present itself in two cases (1) when we require for the "production" of arguments and counterarguments regarding some standpoint, so that we (or an algorithm by itself) may decide on a matter of interest[5] and (2) when the recognition of the argumentation used in some text is required. In the former case, the demands of logical validity seem absolutely necessary, so that the argumentation being produced may indeed prove to be useful in making some decision. In the latter case, however, demanding for every argument to essentially be some kind of a "proof"[6], excludes most of the forms argumentation takes in real-life situations.

That is not only due to the fallacious argumentation which appears in the argumentative reality but also, due to the way non-fallacious argumentation is usually presented in real debates, where, more often than not, what we are presented with is a partial "proof", with some of the inferences or starting points omitted, due to them being perceived as common knowledge. Contrary to the case in which one produces complete and logically valid arguments in order to decide whether a standpoint should be accepted or not, in a real-life discourse, one usually presents only the parts of the argument which "answer" to expressed or expected doubt. Thus, we may refer to *critical validity*, which is the acceptance of some claim based on the lack of expressed doubt towards it[7]. Such a version of validity is adopted by theorists of the

[5]As an example one may see the approach developed by Fox, Krause and Elvang-Gøransson, in [5], whose formalism was developed for applications in medical reasoning. In such cases, it is imperative that arguments produced by algorithms are sequences of valid inferences.

[6]This is probably the reason due to which logical validity is sometimes referenced as geometrical validity, given that the first axiomatic system in mathematics was Euclid's geometry.

[7]We should point out that critical validity incorporates a demand for rationality, that is, for every inference which may be presented as part of some argument to be logically valid.

dialectical tradition.

One important distinction between logically and critically valid arguments is that in the latter case the end result of the process of argumentation is co-produced by the opposing sides in the debate. The same logical argument may take more than one form in a real-life situation, depending on the opposing side's expressions of doubt, thus making the contribution of the antagonist[8] to the formulation of the final product of the argumentation indispensable. In this sense, we shift from a conceptualization viewing arguments as sequences of inferences, to one in which arguments are simply the means by which (reasonable) doubt may be retracted.

Thus, the incorporation in our formalism of the means through which we may express the notion of doubt, as well as the retraction of it, is of utmost importance. In order to achieve this goal, we will adopt the concept of speech act, introduced in linguistics by John Searle in [9][9]. While we may not dive into the concept of a speech act here, we should point out that in this model of communication, "speaking" is treated as "acting", with each utterance associated to some proposition and some function in the process of a debate. Also, one should keep in mind that not all speech acts are considered to be "dialectically" useful.

The functions of speech acts which contribute to the process of substantially resolving a difference of opinions, are (1) assertives constituting claims regarding to the acceptability of the propositional content of the speech acts, (2) commisives expressing acceptance or doubt towards some standpoint, and we may, from now on, distinguish between these two cases by referring to positive and negative commisives, and, finally, (3) directives expressing some demand on behalf of the antagonist of a standpoint regarding either a defense of this standpoint or some clarification regarding the usage of some term by the protagonist. Given that clarifications in terminology usage are not essential parts of a dialectical process[10], our definition of speech acts will not include them.

Before we move on to our proposal for a definition of a speech act, we should also point out that our formalism is constructed upon the following

[8]In argumentation theory, the opposing parties which participate in some debate regarding the acceptability of some standpoint may be divided in the "protagonist" and the "antagonist" based on the attitude of each party towards the standpoint of the issue. There is a variety of terms used in argumentation theory to refer to the opposing "roles" in a debate, e.g. many theoreticians of argumentation adopt the terms "proponent" — "opponent" in order to refer to two (or more) sides in a debate. Following the terminology of the pragma-dialecticians ([4], pp. 58–59), we are also using, in the range of the present paper, the terms "protagonist" and "antagonist".

[9]See [9] pages 1–29, as well as [10], pages 22–50.

[10]They are, however, rhetorically essential, given that ambiguity in terminology usage has been exploited by practitioners of rhetoric throughout the ages in order to maximize the efficiency of their argumentation.

assumptions:

- A first order predicate language $\mathbb{L}$ with equality and a countably infinite number of constants used to denote natural numbers.
- Argumentation schemes[11] are expressed informally as conditionals in the language of propositional calculus.
- Two pre-constructed injections from the elements of $\mathbb{L}$ to the set of odd numbers, $\mathrm{d}(p), p \in \mathbb{L}$ and from the set of the propositional types L of the form $P_0 \wedge \cdots \wedge P_m \rightarrow P$ to the set of even numbers, $\mathrm{D}(L)$, respectively.
- By Σ we will denote a finite set of even numbers, and by Π we will denote a finite set of odd numbers, usually in order to refer to the sets of mutually accepted argumentation schemes and propositions respectively.
- The set of functionality indicators of speech acts, $\mathbf{S} = \{\mathbf{a}, \mathbf{cy}, \mathbf{cn}, \mathbf{dc}\}$, provided with an informal identity relation denoted by $=_{\mathbf{S}}$.
- "$x \in \Pi$"should be understood as the abbreviation of $(x = x_0) \vee \cdots \vee (x = x_n)$, where $x_0, \ldots, x_n$ are the elements of Π.

Definition 2.1. Let $\sigma = \langle p, x \rangle$ be an ordered couple. σ is called a *speech act*, if it satisfies at least one of the following conditions:

1. $x =_{\mathbf{S}} \mathbf{a}$ and $p \in \mathbb{L}$ *(assertive speech act – claim)*
2. $x =_{\mathbf{S}} \mathbf{cy}$ and $p \in \mathbb{L}$ *(commisive speech act – acceptance)*
3. $x =_{\mathbf{S}} \mathbf{cn}$ and $p \in \mathbb{L}$ *(commisive speech act – doubt)*
4. $x =_{\mathbf{S}} \mathbf{dc}$ and $p \in \mathbb{L}$ *(directive speech act – challenge to defend a claim)*

We say that x is the function of σ and denote by $\mathbf{F}(\sigma)$, while p is said to be the proposition of σ and is denoted by $\mathbf{P}(\sigma)$. The set of all speech acts is denoted by $\mathbb{SA}$

[11]As far as the present paper is concerned, argumentation schemes may be intuitively viewed as algorithms, whose input is a suitable set of premises and whose output is some conclusion.

3 Reasons and Elementary Dialogues

The "dialectification" of the notion of argument which we described in the previous paragraphs may now be expressed by an appropriate choice regarding the "atoms" from which we may construct our arguments. Instead of considering propositions as those atoms, we will built our "syllogisms" by putting together suitable exchanges of speech acts, in order to formulate what we may call by "Elementary Dialogues".

However, before we give the definition of an elementary dialogue, we would like to make a reference to the two different forms a critically valid defense against criticism may take. On the one hand, we have argumentation schemes used to "construct" the acceptability of a given standpoint on the acceptability of every element of a specific set of premises. On the other hand, we may always defend a claim against criticism, by pointing out that the standpoint has already been accepted. The need of such defense may arise when the accepted propositions are too many for anyone to remember by heart, as is the case in any scientific field. It should be noted that such version of argument may not be compatible with the standard notion of an argument as a sequence of inferences; it is, however, completely in accordance with the view of an argument as something which aims to the retraction of some doubt regarding some standpoint at issue. Those two versions of defense are incorporated into our formalism by the following definition of a reason.

Definition 3.1. Let Π and Σ be a set of mutually accepted propositions and a set of mutually accepted argument schemes respectively, $p, p' \in \mathbb{L}$ and $\sigma = \langle p', \mathbf{a} \rangle$. Then

1. If $p' \equiv (\mathrm{d}(p) \in \Pi)$, then, σ will be called an *extensional reason* for p with regard to Π.

2. If there exist $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, and $q_0, \ldots, q_n \in \mathbb{L}$ such that $q_0 \equiv (\mathrm{D}((l_1 \wedge \cdots \wedge l_n) \rightarrow l) \in \Sigma)$, where $q_1, \ldots, q_n$ are instances of the propositional types $l_1, \ldots, l_n$ and $p' \equiv ((q_0 \wedge \cdots \wedge q_n) \rightarrow p)$, then, σ is called an *intentional reason* for p with regard to Σ.

Given that our ultimate objective is a formalism that may express every aspect of the argumentative reality, we may consider cases of dialogues in which utterances remain unanswered and even of speech acts exchanges that do not "make sense". However, for us now, in order to move to the formulation of the definition of an elementary dialogue, we should specify the "meaningful" exchanges of speech acts. We will not elaborate further on the subject here but, in order to an exchange of two speech acts to be meaningful, it is sufficient that they have the same propositional content and that at least one of them is an assertive. We will refer to dialogues consisting only of such exchanges as "orderly dialogues".

Definition 3.2. 1. Let $n, m \in \mathbb{N}$ and $\Delta = \langle (a_i)_{i=0}^n, (b_i)_{i=0}^m \rangle$, where, for every $i = 0, \dots, n$ and $j = 0, \dots, m$, $a_i, b_j \in \mathbb{SA}$. Then Δ is called a *dialogue*.

2. Let $n \in \mathbb{N}$ and $\Delta = \langle (a_i)_{i=0}^n, (b_i)_{i=0}^n \rangle$, where, for every $i = 0, \dots, n$, $a_i, b_i \in \mathbb{SA}$, $\mathbf{P}(a_i) = \mathbf{P}(b_i)$ and at least one of $\mathbf{F}(a_i), \mathbf{F}(b_i)$ is equal to $\mathbf{a}$. Then Δ is called an *orderly dialogue*.

We will now introduce the definition of an elementary dialogue, in which we include also the case of a lack of doubt as an immediate acceptance, mostly for technical reasons.

Definition 3.3. Let $n \in \mathbb{N}$ and $\Delta = \langle (a_i)_{i=0}^n, (b_i)_{i=0}^n \rangle$, be an orderly dialogue. Δ is called an *elementary dialogue* for $\mathbf{P}(a_0)$, if one of the following conditions holds:

1. $n = 0$, $\mathbf{F}(a_0) = \mathbf{a}$, and $\mathbf{F}(a_0) = \mathbf{a}$;
2. $n = 2$ and the following hold:
   (a) $\mathbf{F}(a_0) = \mathbf{a}$ and $\mathbf{F}(b_0) = \mathbf{cn}$;
   (b) $\mathbf{P}(b_1) = \mathbf{P}(b_0)$, $\mathbf{F}(a_1) = \mathbf{a}$, and $\mathbf{F}(b_1) = \mathbf{dc}$;
   (c) $\mathbf{F}(a_1) = \mathbf{a}$, $\mathbf{F}(b_1) \in \{\mathbf{cn}, \mathbf{cy}\}$, and a_2 is an extensional reason for $\mathbf{P}(a_0)$;
3. $n = 2$ and the following hold:
   (a) $\mathbf{F}(a_0) = \mathbf{a}$, and $\mathbf{F}(b_0) = \mathbf{cn}$;
   (b) $\mathbf{P}(b_1) = \mathbf{P}(b_0)$, $\mathbf{F}(a_1) = \mathbf{a}$, and $\mathbf{F}(b_1) = \mathbf{dc}$;
   (c) $\mathbf{F}(a_1) = \mathbf{a}$, $\mathbf{F}(b_1) \in \{\mathbf{cn}, \mathbf{cy}\}$, and a_2 is an intentional reason for $\mathbf{P}(a_0)$.

Moreover, if Δ satisfies condition 1, then we say that it is an *immediate acceptance* for $\mathbf{P}(a_0)$, while, if Δ satisfies condition 2 (res. 3.), then it will be called an *extensional (res. intentional) elementary dialogue* for $\mathbf{P}(a_0)$ with regard to Π (res. Σ).

We may, now, intuitively consider that some proposition is defended in a dialogue, if every doubt regarding this proposition is met by some reason in the same proposition.

4 Arguments, Fallacies and Dialectical Proofs

Having defined an atom of our syllogisms in the previous section in the form of elementary dialogues, we may now present our proposal for the definition of an argument. Our demands for a sequence of exchanges of speech acts to be considered as an argument for some proposition p in this definition are (1) that it must include some reason for p, (2) that, obviously, we may not support an extensional reason for a proposition by any kind of reason, and (3) that every "intermediate step" is always some kind of inference in conjunction with the claim that this form of inferences is mutually accepted.

Definition 4.1. Let $T = \langle V, E\rangle$ be a finite tree with a root, the vertices of which are elementary dialogues and $q \in \mathbb{L}$. Let, also, $\mathrm{Root}(T) = \Delta_0$ be an elementary dialogue for q and Σ be a set of mutually accepted argumentation schemes. If

1. every vertex of T which is not a leaf of T, is an intentional elementary dialogue and
2. for every vertex of T, let it be Δ_i, where $i \in \mathbb{N}$ and $i < |V|$, if Δ_i is not a leaf of T, and if $\langle p_0 \wedge \cdots \wedge p_n \to p, \mathbf{a}\rangle$ is the intentional reason of Δ_i, where $n \in \mathbb{N}$, then every child of Δ_i is a reason for some $q' \in \{p_0, \ldots, p_n, (\mathrm{D}((l_1 \wedge \cdots \wedge l_n) \to l) \in \Sigma)\}$, where $l_1 \wedge \cdots \wedge l_n) \to l$, the argument scheme of which $p_0 \wedge \cdots \wedge p_n \to p$ is an instance,

then T is called an *argument* for q.

In the above definition, we did not demand for every doubt regarding some standpoint expressed in some dialogue that contains an argument for the same standpoint to be "answered", exactly because we wanted to include critically invalid arguments as instances of our definition. Thus, our definition allows for the adoption of critical norms regarding argument evaluation, as well as for distinguishing between sound and fallacious argumentation in a substantial manner. As an example of this direction we may consider the following definition.

Definition 4.2. Let $T = \langle V, E\rangle$ be an argument, $p \in \mathbb{L}$, Π be a set of mutually accepted premises and Σ be a set of mutually accepted argumentation schemes. If

1. for every leaf of T which is an extensional elementary argument, let it be Δ_i, if $q \in \Pi$ is the extensional reason of Δ_i then $q \in \Pi$ holds,
2. every argumentation scheme, let it be L, with some instance of L being the proposition of the intentional reason of some vertice of T which is not a leaf, $\mathrm{D}(L) \in \Sigma$ holds,

then T is called a *dialectical proof* from Π and Σ for p.

To conclude, while the formalism we propose is still a work in progress, we do manage to propose a definition for the concept of argument which is susceptible to critical evaluation, as far as validity is concerned. Also, given that the choice of a first order language didn't actually affect the form of our definition, an expansion towards abstract logical systems, institutions etc., is possible and definitely among our plans regarding future work. Moreover, we intend to study further the behavior of arguments as parts of dialogues, as well as the possibility for a formalism of the concept of anthropological validity in a dialectified manner[12].

References

[1] P. Besnard, A. Hunter, Elements of Argumentation, The MIT Press, 2008.

[2] M. Bournazos, Logic and Rhetoric, Diploma Thesis (supervisor: Petros Stefaneas), National Technical University of Athens, Department of Mathematics, Athens, 2019.

[3] C. I. Chesñevar, A. G. Maguitman, and R. P. Loui, Logical Models of Argument, ACM Computing Surveys, **32** (2000), 337–383.

[4] F. H. van Eemeren, R. Gootendorst, A Systematic Theory of Argumentation: The pragma-dialectical approach, Cambridge:Cambridge University Press, 2003.

[5] J/ Fox, P. Krause, M. Elvang-Gøransson, Argumentation as a General Framework for Uncertain Reasoning, in Proceedings of the 9th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI 1993), 428–434, Morgan Kaufmann, 1993.

[6] J. L. Pollock, Self-Defeating Arguments, Minds and Machines **1** (1991), 367–392, 1991.

[7] J. L. Pollock, A Theory of Defeasible Reasoning, International Journal of Intelligent Systems **6**, 33–54, 1991.

[8] J. L. Pollock, How to reason defeasibly, Artificial Intelligence, **57** (1992), 1–42.

[9] J. R. Searle, Expression and meaning. Studies in the theory of speech acts, Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

[10] J. R. Searle, "Speech Acts: An Essay in the Philosophy of Language", Cambridge: Cambridge University Press, 1970

[12] Work in this direction is included in [2].

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КЛОНЫ (О ШКАЛАХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР ФИКСИРОВАННОЙ МОЩНОСТИ)

А. Г. Пинус

Novosibirsk State Technical University,
20 K. Marx ave., Novosibirsk, 630073, Russia
e-mail: ag.pinus@gmail.com

Вопросы классификации, в том или ином смысле, изучаемых объектов, согласно Аристотелю, принадлежат к фундаментальным вопросам любой науки. То же самое относится и к универсальным алгебрам с данным фиксированным базисным множеством в универсальной алгебре. Однако большинство изучаемых при этом свойств подобных алгебр определяются, в конечном счете, не набором их сигнатурных функций, а функциональным клоном термальных функций этих алгебр, выступающим в этом контексте инвариантом самих рассматриваемых алгебр. В данной работе предложен ряд первоначальных понятий и вопросов, связанных с подобной абстрактной (с точностью до изоморфизма) классификацией универсальных алгебр с фиксированным базисным множеством по клонам их термальных функций.

По определению *универсальная алгебра* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_{\mathfrak{A}} \rangle$ сигнатуры σ это некоторое фиксированное множество A (*базисное* или основное *множество алгебры* $\mathfrak{A}$) и, опять же, некоторый фиксированный набор сигнатурных (соответствующих, с сохранением арности, символам сигнатуры σ) функций на этом множестве (если $f^n \in \sigma$, то $f^n_{\mathfrak{A}}$ — n-местная функция на множестве A). При этом в дальнейшем нижний символ у $\sigma_{\mathfrak{A}}$ и $f^n_{\mathfrak{A}}$ (когда это не чревато путаницей) как правило будет опускаться. Функции на базисном множестве алгебры $\mathfrak{A}$, получаемые суперпозицией (многократной) из сигнатурных функций алгебры $\mathfrak{A}$ и селекторов $e^i_n(x_1, \cdots, x_n) = x_i$ на множестве A, называются *термальными функциями алгебры* $\mathfrak{A}$, а их совокупность обозначается как $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$.

Напомним, что *функциональный клон* на множестве A — это некоторая совокупность функций на A, замкнутая относительно суперпозиции и включающая в себя все селекторные функции $e^i_n(x_1, \cdots, x_n) = x_i$ (для любых $1 \leq i \leq n \in \omega$) на множестве A. Таким образом, совокупность $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ всех термальных функций алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_{\mathfrak{A}} \rangle$ является функциональным клоном на ее базисном множестве A. С другой стороны, для любого функционального клона F на множестве A существует универсальная алгебра $\mathfrak{A}_F = \langle A; F \rangle$ с базисным множеством A такая, что клон ее термальных функций совпадает с клоном $F : \mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_F) = F$ (достаточно в качестве сигнатурных функций алгебры $\mathfrak{A}_F$ выбрать все функции из F). Для любой совокупности G функций на множестве A через $\langle G \rangle$ обозначим функциональный клон, порожденный множеством G (наименьший по включению $\subseteq$ клон включающий в себя G).

Поскольку практически все свойства универсальных алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$: их производные структуры (решетки подалгебр $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$, конгруэнций $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$, алгебраических множеств $\mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}$, группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$, полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$, внутренних изо- $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ и гомоморфизмов $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$ и пр.), так называемые "Мальцевские свойства" (конгруэнц-модулярность, арифметичность, дискриминаторность и т.д.) многообразий $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$, порожденных алгеброй $\mathfrak{A}$ зависят, в конечном счете, не от совокупности сигнатурных $\sigma_{\mathfrak{A}}$-функций алгебры $\mathfrak{A}$, а от совокупности ее термальных функций $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$, образующих функциональный клон на базисном множестве алгебры $\mathfrak{A}$, то в вопросах классификации универсальных алгебр с фиксированным базисным множеством $\mathfrak{A}$ естественно проводить эту классификацию с точностью до клонов $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ универсальных алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_{\mathfrak{A}} \rangle$, т.е. классифицировать не сами алгебры $\mathfrak{A}$, а функциональные клоны на множестве A. Для фиксации же самой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_{\mathfrak{A}} \rangle$ при данном клоне $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ ее термальных функций достаточно в клоне $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ указать некоторую совокупность порождающих его функций (в данном случае - совокупность $\sigma_{\mathfrak{A}}$). Учитывая также то, что, как правило, в универсальной алгебре алгебры $\mathfrak{A}$ рассматриваются с точностью до изоморфизма, то и клоны их термальных функций $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ на фиксированном базовом множестве A следует классифицировать с точностью до их сопряженности перестановками множества A.

В самой универсальной алгебре эта ситуация отражена в понятии *"рациональной эквивалентности" универсальных алгебр* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma^1_{\mathfrak{A}} \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma^2_{\mathfrak{L}} \rangle$ сигнатур σ_1 и σ_2 соответственно, введенном А. И. Мальцевым. В конечном счете рациональная эквивалентность алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ означает сопряженность клонов их термальных функций $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{Tr}(\mathfrak{B})$ (на соответствующих множествах A и B) некоторой биекцией множества A на B. То есть классификация универсальных алгебр с базисным множеством A относительно их рациональной эквивалентности суть классификация функциональных клонов на A с точностью до их сопряженности перестановками множества A. Тем самым, из известных результатов Е. Поста [1] и Ю. И. Янова, А. А. Мучника [2] о мощностях совокупностей

F_A всех клонов на двух- и не менее чем трехэлементных множествах A ($|F_A| = \aleph_0$, если $|A| = 2$ и $|F_A| = 2^{\aleph_0}$, если $2 < |A| < \aleph_0$) следует, что максимальные совокупности рационально попарно не эквивалентных двухэлементных универсальных алгебр счетны, а n-элементных (при $2 < n < \omega$) — континуальны.

В связи с замеченным выше введем следующее отношение эквивалентности $\sim$ на совокупности $F(A)$ всех клонов на множестве A: для $F_1, F_2 \in F_A$, $F_1 \sim F_2$ если существует перестановка π на множестве A, сопрягающая функции из F_1 и F_2, т. е. такая, что $F_1 = \pi^{-1}F_2\pi = \{\pi^{-1}f(\pi(x_1), \cdots, \pi(x_n))|f \in F_2\}$. Заметим, что отношение $\sim$ на клонах соответствует отношению рациональной эквивалентности на соответствующих универсальных алгебрах.

Традиционно совокупность F_A всех клонов на A рассматривается как решетка L_A относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$: $L_A =< F_A; \wedge, \vee >$, где для $F_1, F_2 \in F_A$ имеет место $F_1 \wedge F_2 = F_1 \cap F_2$ и $F_1 \vee F_2 = \langle F_1 \cup F_2 \rangle$. Очевидным образом отношение $\sim$ не является отношением конгруэнции на L_A. К примеру, пусть a и b два различных элемента из A и пусть f_a (f_b) одноместная функция на A с областью значений $\{a\}$ ($\{b\}$). Пусть $F_a = \langle f_a \rangle$ и $F_b = \langle f_b \rangle$, пусть π перестановка на A такая, что $\pi(a) = b$, таким образом $F_a \sim F_b$ ($F_a = \pi^{-1}F_b\pi$). Тем самым, $F_a \wedge F_b = Z_A$ (наименьший клон на A включающий в себя лишь селекторные функции), но $F_a \sim F_a$, $F_a \sim F_b$ в то время как $F_a \wedge F_a = F_a \nsim Z_A = F_a \wedge F_b$.

Введем следующее отношение $\leq$ на совокупности F_A всех функциональных клонов на A: для $F_1, F_2 \in F_A$ пусть $F_1 \leq F_2$ тогда и только тогда, когда для некоторой перестановки π на множестве A имеет место включение $\pi^{-1}F_1\pi \subseteq F_2$. Соответствующим образом определяется отношение $\leq$ на универсальных алгебрах с базисным множеством A: для $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma^1_{\mathfrak{A}_1} \rangle$ и $\mathfrak{A}_2 = \langle A; \sigma^2_{\mathfrak{A}_2} \rangle$ будем говорить, что *алгебра* $\mathfrak{A}_1$ *беднее алгебры* $\mathfrak{A}_2$ ($\mathfrak{A}_2$ богаче чем $\mathfrak{A}_1$, алгебра $\mathfrak{A}_1$ рационально интерпретируется в $\mathfrak{A}_2$) $\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{A}_2$, если $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_1) \leq Tr(\mathfrak{A}_2)$. Очевидно, что отношение $\leq$ является квазипорядком на совокупности F_A.

Отметим, что отношение $\leq$ между алгебрами ($\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{A}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{A}_2$ богаче $\mathfrak{A}_1$) согласовано со стандартным понятием "обогащения" алгебраических, систем сводящемся в случае универсальных алгебр к добавлению в качестве новых сигнатурных функций обогащения функций, не входящих в сигнатуру исходной алгебры. Отметим также, что введенное отношение $\leq$ на алгебрах с фиксированным основным множеством тесно связано с известным отношением "представимости" или "интерпретируемости" (см., к примеру, [9],[10]) между многообразиями универсальных алгебр. Напомним соответствующее определение. Пусть V_1 и V_2 два многообразия универсальных алгебр сигнатур, соответственно, σ_1 и σ_2. Пусть $\sigma_1 = \langle f_i^{n_i} | i \in I \rangle$ и $P = \langle t_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) | i \in I \rangle$ некоторая последовательность σ_2-термов от соответствующих переменных. Для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_2 \rangle$ через $\mathfrak{A}^P = \langle A; \sigma_1 \rangle$ обозначим алгебру с основным множеством A, сигнатурные функции f_i которой определимы как термальные функции $t_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$ алгебры $\mathfrak{A}$. *Многообразие* V_1 *представимо в многообразии* V_2, если существует последовательность P термов сигнатуры σ_2 такая, что для любой алгебры $\mathfrak{A}$ из V_2 алгебра $\mathfrak{A}^P$ входит в V_1, т.е. $V_2^P \subseteq V_1$ (здесь $V_2^P = \{\mathfrak{A}^P | \mathfrak{A} \in V_2\}$). Отношение представимости многообразия V_1 в многообразии V_2 обозначим как $V_1 \to V_2$. Очевидно, что отношение $\to$ является отношением квазипорядка между многообразиями универсальных алгебр произвольных сигнатур.

Через $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ обозначим многообразие, порожденное алгеброй $\mathfrak{A}$.

Утверждение 1. *Для любых алгебр* $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ *и* $\mathfrak{A}_2 = \langle A_2; \sigma \rangle$, *если* $\mathfrak{A}_1$ *беднее* $\mathfrak{A}_2$, *то многообразие* $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1)$ *представимо в многообразии* $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2)$, *т.е. если* $\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{A}_2$, *то* $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{A}_2$, $\sigma_1 = \langle f_i^{n_i} | i \in I \rangle$ и $P = \langle t_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) | i \in I \rangle$ — последовательность термов сигнатуры σ_2 такая, что $\mathfrak{A}_1 \cong \mathfrak{A}_2^P$. В силу формулы Биркгофа $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2) = HSP(\{\mathfrak{A}_2\})$, того, что для любого множества $J (\mathfrak{A}_2^J)^P = (\mathfrak{A}_2^P)^J = \mathfrak{A}_1^J$ и того, что для любой подалгебры (гомоморфного образа) $\mathfrak{L}$ любой алгебры $\mathfrak{L}$ из $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2)$ алгебра $\mathfrak{L}^P$ является подалгеброй (гомоморфным образом) алгебры $\mathfrak{L}^P$, имеет место включение $(\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2))^P \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1)$, т.е. многообразие $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1)$ действительно представимо в многообразии $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2)$. □

Пусть $\approx$ отношение эквивалентности на F_A, порожденное квазипорядком $\leq$: $F_1 \approx F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq F_2$ и $F_2 \leq F_1$. Очевидно, что отношением $\sim$ включено в отношение $\approx$. Заметим, что для конечных множеств A отношения $\sim$ и $\approx$ совпадают.

Утверждение 2. *Для конечных множеств* A *отношения* $\sim$ *и* $\approx$ *на* F_A *совпадают.*

Пусть A — некоторое конечное множество, $F_1, F_2 \in F_A$ и $F_1 \leq F_2$, $F_2 \leq F_1$. Таким образом существуют перестановки π_1, π_2 на A такие, что $\pi_1^{-1} F_1 \pi_1 \subseteq F_2$ и $\pi_2^{-1} F_2 \pi_2 \subseteq F_1$. Тем самым:

$$\pi_2^{-1} \pi_1^{-1} F_1 \pi_1 \pi_2 \subseteq \pi_2^{-1} F_2 \pi_2 \subseteq F_1. \tag{1}$$

Через $F^{(n)}$ (для $n \in \omega$) обозначим *n-фрагмент* клона F — совокупность всех функций из F арности, не превосходящей n. Таким образом, $F = \bigcup\limits_{n \in \omega} F^{(n)}$, и в случае конечности множества A для любых $n \in \omega$ и $F \in F_A$ фрагмент $F^{(n)}$ конечен. Включения (1) влекут включения $\pi_2^{-1} \pi_1^{-1} F^{(n)} \pi_1 \pi_2 \subseteq \pi_2^{-1} F_2^{(n)} \pi_2 \subseteq F_1^{(n)}$.

Поскольку совокупности $\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}F_1^{(n)}\pi_1\pi_2$ и $F_1^{(n)}$ равномощны, для любого $n \in \omega$ имеем равенства $\pi_2^{-1}F_2^{(n)}\pi_2 = F_1^{(n)}$ и, тем самым, $\pi_2^{-1}F_2\pi_2 = F_1$. То есть $F_1 \sim F_2$, что и требовалось показать.

Остается открытым

Вопрос 1. Совпадают ли отношения $\sim$ и $\approx$ на F_A для произвольных (бесконечных) множеств A?

Положительный ответ на этот вопрос означал бы некоторое обобщение (усиление) известной теоремы Кантора-Бернштейна о мощностях множеств.

Утверждение 3. *Из положительного ответа на Вопрос 1 вытекает утверждение теоремы Кантора — Бернштейна.*

Доказательство. Пусть для множеств B_0 и B_1 имеет место $|B_0| \leq |B_1|$ и $|B_1| \leq |B_0|$, т. е. существуют вложения φ_0 множества B_0 в B_1 и φ_1 — множества B_1 в B_0. Можно считать B_0 и B_1 дизъюнктивными. Очевидным образом существуют множества A такие, что $B_0 \cup B_1 \subseteq A$ и вложения φ_i $(i = 0, 1)$ продолжимы до некоторых перестановок π_i на A. К примеру, пусть попарно дизъюнктивные множества B_0^n, B_1^n $(n \in \omega)$ таковы, что $|B_0^n| = |B_0|$, $|B_1^n| = |B_1|$ и при этом $B_0^0 = B_0$, $B_1^0 = B_1$. Тогда требуемые перестановки π_i можно определить как φ_i на B_i и π_i является биекцией B_i^{n+1} на B_i^n (для $n \in \omega$) и π_i тождественна на $(\bigcup\limits_{n\in\omega} B_{1-i}^n \backslash \varphi(B_i))$.

Для любого $B \subseteq A$ пусть F^B — функциональный клон на A, порожденный совокупностью функций $\{f_b | b \in B\}$, где $f_b(a) = b$ для любого $a \in A$. Очевидно, что в этом случае, в силу замеченного выше, имеют место $F^{B_1} \leq F^{B_2}$ и $F^{B_2} \leq F^{B_1}$. Положительный ответ на Вопрос 1 в данном случае означал бы истинность отношения $F^{B_1} \sim F^{B_2}$, т. е. равномощность множеств B_1 и B_2 а, значит, истинность утверждения теоремы Кантора — Бернштейна. □

Отмеченные выше обстоятельства приводят к следующему естественному определению: *шкалой универсальных алгебр мощности* $\aleph$ назовем частично упорядоченное множество $S_\aleph =< F_A/\approx; \leq>$, где A некоторое множество мощности $\aleph$.

Основанием для этого определения служат отображение φ, сопоставляющее алгебрам $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_\mathfrak{A}\rangle$ с базисным множеством A функциональные клоны $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ их термальных функций ($\varphi(\mathfrak{A}) = \mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) \in F_A$) и монотонное отображение ψ решетки L_A на шкалу $S_\aleph$ для множества A мощности $\aleph$ ($\psi(F) = F/{\approx}$ для $F \in F_A$).

Прежде всего отметим, что шкала $S_\aleph$ (для $\aleph \geq 3$) не является решеткой. Напомним, что *дискриминатором* на множестве A называется функция d_A такая, что для $a, b, c \in A$

$$d_A(a,b,c) = \begin{cases} a, \text{ если } a \neq b, \\ c, \text{ если } a = b. \end{cases}$$

Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ называется *дискриминаторной*, если $d_A \in \mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$. Через $\mathrm{CTr}(\mathfrak{A})$ обозначим совокупность так называемых условно термальных (см., к примеру, [3]) функций алгебры $\mathfrak{A}$. Для дискриминаторных алгебр $\mathfrak{A}$ имеет место равенство $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) = \mathrm{CTr}(\mathfrak{A})$. Определение *шкалы потенциалов вычислимости* $\Upsilon_\aleph$ (см., опять же, [3]) универсальных алгебр мощности $\aleph$ аналогично введенному выше определению шкалы $S_\aleph$ (заменой клонов $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ на клоны $\mathrm{CTr}(\mathfrak{A})$) и, тем самым, в силу равенства $\mathrm{CTr}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ в случае когда $d_A \in \mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$, шкала $S_\aleph$ потенциалов вычислимости алгебр мощности $\aleph$ изоморфна фильтру $P^d_\aleph$ шкалы $S_\aleph$, порожденному элементом $F_d/\approx$ этой шкалы, где F_d — клон, порожденный функцией d_A на множестве A мощности $\aleph$. Более того, поскольку отображение η из $S_\aleph$ на $\Upsilon_\aleph$, определенное как $\eta(F/\approx) = \langle F \cup \{d_A\} \rangle/\approx = CT(\mathfrak{A}_F)/\approx$ является монотонным, имеет место

Утверждение 4. *Шкала $\Upsilon_\aleph$ потенциалов вычислимости алгебр мощности $\aleph$ является ретрактом шкалы $S_\aleph$ универсальных алгебр мощности $\aleph$.*

Основные свойства шкалы Υ_n потенциалов вычислимости алгебр мощности n (для $n \in \omega$), а значит и фильтра P^d_n шкалы универсальных алгебр мощности S_n, можно найти в обзоре [4]:

1. прежде всего отметим конечность этого фильтра и известные оценки его мощности
   ($|P^d_2| = 5$, $|P^d_3| = 53$, $|P^d_4| = 22610$, $|P^d_n| \leq 2^{n+(\frac{n}{e})^n - [\sqrt{n}] + \frac{1}{2}e^{3([\sqrt{n}]+\frac{1}{2})}}$ для $n \geq 4$);

2. число атомов фильтра P^d_n равно $[\frac{n}{2}] + 1 + R(n)$, где $R(n)$ — число максимальных транзитивных на n подгрупп полной симметрической группы на n попарно не сопряженных в этой группе;

3. число коатомов фильтра P^d_n равно $n - 1 + K(n)$, где $K(n)$ — число различных простых делителей числа n;

4. наибольшая длинна неуплотняемой цепи в фильтре P^d_n равна $\sum\limits_{m=2}^{n} C^m_n l_m + 2^{n+1} - 2n + 2$, где $l_m = [\frac{3m-1}{2}] - \sum\limits_{i=0}^{log_2 m} [\frac{m}{2^i}] \mod 2$.

Клонам, являющимся атомами и коатомами в решетке L_A для множества A мощности $\aleph$, соответствуют, с помощью отображения ψ, минимальные и максимальные элементы шкалы $S_\aleph$. Хорошо известно описание И. Розенбергом [5] коатомов решеток L_A для конечных множеств A как совокупностей функций, сохраняющих те или иные отношения на A

и, как следствие этого, конечность числа коатомных клонов на конечных множествах A. Так же известно его описание [6] атомных клонов на конечных множествах A. Из этих результатов вытекает конечность числа коатомных и атомных клонов на n-элементном множестве ($n \in \omega$), попарно не сопряженных перестановками этого множества, т.е. конечность числа атомов и коатомов шкалы $S_{\aleph}$. Тем самым вполне естественен

Вопрос 2. Найти точное значение или хотя бы оценить число атомов и коатомов шкал S_n универсальных n-элементных алгебр для натуральных n.

Представляет интерес нахождение и других параметров шкал S_n ($n \in \omega$) n-элементных универсальных алгебр.

Вопрос 3. Каково максимальное число попарно несравнимых элементов шкал S_n при $n \in \omega$?

Для бесконечных кардиналов $\aleph$ ширина (число попарно несравнимых элементов) шкалы $S_{\aleph}$ как минимум континуально. К примеру рассмотрим континуум попарно неизоморфных отношений эквивалентности $\Theta_i (i \in I)$ на множестве A мощности $\aleph$. Пусть $\{S^i_j | j \in I_i\}$ — разбиения множества A, соответствующие эквивалентностям $\Theta_i (i \in I)$. На A определим одноместные функции $f_i (i \in I)$ как некоторые функции выбора для множеств $\{S^i_j | j \in I_i\}$, $f_i(a) = f_i(b) \in S^i_j$ для всех $a, b \in S^i_j$ ($j \in I_i$). Для $i \in I$ определим алгебры $\mathfrak{A}_i = \langle A; f_i \rangle$. Очевидно, что $\mathfrak{A}_{i_1} \not\leq \mathfrak{A}_{i_2}$ для $i_1 \neq i_2 \in I$.

Из результатов Поста вытекает существование счетных цепей в S_2, при этом максимальный порядковый тип неуплотняемых в S_2 цепей равен $3 + \omega^* + 3$. Естественен интерес о подобной ситуации для шкал S_n при $2 < n < \omega$.

Вопрос 4. Каковы мощности неуплотняемых цепей в шкалах S_n (для $2 < n < \omega$) и каковы порядковые типы этих цепей? В частности, существуют ли у этих цепей интервалы плотного порядкового типа?

Естественен и ряд других открытых вопросов о шкалах S_n.

Вопрос 5. Существуют ли нетривиальные автоморфизмы шкал S_n при $n \in \omega$ и, более общо, шкал $S_{\aleph}$ для любых кардиналов $\aleph$?

Поскольку любая конечная решетка вложима как решетка в некоторый являющийся решеткой интервал шкалы Υ_n для подходящего n, любое конечное частично упорядоченное множество вложимо в шкалу S_n для подходящего натурального n. В связи с этим представляет интерес

Вопрос 6. Какие частично упорядоченные множества изоморфно вложимы в шкалы $S_\aleph$ для бесконечных кардиналов $\aleph$?

Естественен так же

Вопрос 7. Являются ли шкалы потенциалов вычислимости $\Upsilon_\aleph$ (фильтры $P^d_\aleph$) алгебр мощности $\aleph$ элементарно определимыми в шкалах $S_\aleph$ универсальных алгебр мощности $\aleph$ (или, что равносильно, является ли элемент $F_d/\approx$, где F_d — клон, порожденный дискриминатором d_A на множестве A мощности $\aleph$) элементарно определимым в шкале $S_\aleph$ (в решетке L_A)?

Заметим наконец, что для любых кардиналов $\aleph$ и $\aleph_1$ таких, что $\aleph \leq \aleph_1$, шкала $S_\aleph$ является ретрактом шкалы $S_{\aleph_1}$, что позволяет переносить целый ряд свойств шкалы $S_{\aleph_1}$ на шкалу $S_\aleph$ и обратно.

Действительно, пусть множество A является подмножеством множества B. Достаточно заметить, что частично упорядоченное множество $\langle F_A; \subseteq\rangle$ является ретрактом частично упорядоченного множества $\langle F_B; \subseteq\rangle$. Пусть $F \in F_A$, через $\varphi(F)$ обозначим наибольший клон на множестве B такой, что ограничения входящих в него функций до множества A со значениями (на аргументах из A) лежащими в A, входят в клон F. Очевидно, что φ является вложением $\langle F_A; \subseteq\rangle$ в $\langle F_B; \subseteq\rangle$. Пусть теперь $F \in F_A$ положим $\psi(F) = \{f \restriction A \in F | f(A) \subseteq A\} \in F_A$. Так же очевидно, что отображение $\psi : F_B \to F_A$ сохраняет порядок $\subseteq$ и при этом $\psi(\varphi(F)) = F$ для $F \in F_A$. Из этого и следует, что шкала $S_\aleph$ является ретрактом шкалы $S_{\aleph_1}$ при $\aleph \leq \aleph_1$.

Подобно введенной в работе [7] метрике на совокупности F_A функциональных клонов основанной на отличии их фрагментов, естественно определить некоторую метрику на шкале $S_\aleph$ универсальных алгебр мощности $\aleph$ и псевдометрику на совокупности всех универсальных алгебр с фиксированным базисным множеством A ($|A| = \aleph$). Прежде всего еще раз напомним, что *n-фрагментом* $F^{(n)}$ ($n \in \omega$) функционального клона F называется совокупность функций из F, арность которых не превосходит n. Для точек $F_1/\approx$ и $F_2/\approx$ шкалы $S_\aleph$ (для алгебр $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma^1_{\mathfrak{A}_1}\rangle$ и $\mathfrak{A}_2 = \langle A; \sigma^2_{\mathfrak{A}_2}\rangle$, здесь $|A| = \aleph$) определим расстояние между ними следующим образом:

$$\varrho(F_1/\approx, F_2/\approx) = \begin{cases} \frac{1}{\max\{n\in\omega | \pi^{-1}F_1^{(n)}\pi = F_2^{(n)} \text{ для некоторой перестановки } \pi \text{ на } A, |A|=\aleph\}+1}, \\ \qquad \text{если } F_1/\approx \neq F_2/\approx \\ 0, \text{ если } F_1/\approx = F_2/\approx . \end{cases}$$

$$\varrho(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)=\begin{cases}\frac{1}{\max\{n\in\omega \mid \pi^{-1}\mathrm{Tr}^{(n)}(\mathfrak{A}_1)\pi=\mathrm{Tr}^{(n)}(\mathfrak{A}_2)\text{ для некоторой перестановки }\pi\text{ на }A\}+1}, \\ \qquad\qquad\text{если } \mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_1)\neq\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_2) \\ 0,\text{ если } \pi^{-1}\mathrm{Tr}^{(n)}(\mathfrak{A}_1)\pi=\mathrm{Tr}^{(n)}(\mathfrak{A}_2) \\ \qquad\qquad\text{для некоторой перестановки } \pi \text{ на } A.\end{cases}$$

Таким образом, для алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ с базисным множеством A $\varrho(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)=0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ рационально эквивалентны и $\varrho(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)=\frac{1}{n+1}$ тогда и только тогда, когда все вычисления в алгебрах $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ от n аргументов могут быть сопряжены некоторой перестановкой их базисного множества, но такого сопряжения не существует для вычислений от $n+1$ аргумента. В частности, в этом случае совокупности n-порожденных подалгебр алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ так же сопряжены некоторой перестановкой их базисного множества.

Алгебру $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle$ назовем *алгеброй ограниченной арности*, если $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})=\langle \mathrm{Tr}^{(n)}(\mathfrak{A})\rangle$ для некоторого $n\in\omega$, иначе говоря, если любая термальная функция алгебры $\mathfrak{A}$ может быть представлена как суперпозиция некоторых не более чем n-арнных ее термальных функций для некоторого натурального n. В частности, алгебрами ограниченной арности являются все алгебры, арность сигнатурных функций которых ограничена в совокупности.

Алгебру $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle$ назовем *изолированной*, если соответствующая ей точка $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})/\approx$ метрического пространства $\langle S_{\aleph};\varrho\rangle$ (здесь $|A|=\aleph$) является изолированной точкой в этом пространстве. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}$ изолирована, если клон $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ является изолированной точкой метрического пространства всех клонов на множестве A. Другими словами, алгебра $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle$ изолирована, если для некоторого натурального n и любой алгебры $\mathfrak{L}=\langle A;\sigma_{\mathfrak{L}}\rangle$ сопряженность некоторой перестановкой множества A n-фрагментов $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})^{(n)}$ и $\mathrm{Tr}(\mathfrak{L})^{(n)}$ влечет рациональную эквивалентность этих алгебр.

В качестве примера изолированных n-элементных алгебр укажем алгебры $\mathfrak{A}_n=\langle n=\{0,1,\cdots,n-1\},v_n(x,y)\rangle$, где v_n — функция Вебба на множестве n (образующая как известно, полную систему функций на n). Очевидным образом любая изолированная алгебра является алгеброй ограниченной арности. В терминологии статьи [7] изолированные алгебры $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle$ это алгебры, клон термальных функций $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ которых имеет конечную размерность.

Еще ряд примеров изолированных алгебр дает предложение 1 о клонах конечной размерности из работы [7]. В терминах данной работы оно будет выглядеть так:

Утверждение 5. *Если для алгебры $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle$ конечной сигнатуры существует конечное число более богатых чем алгебра $\mathfrak{A}$ алгебр $\mathfrak{A}_1=$*

$\langle A; \sigma^1_{\mathfrak{A}_1}\rangle, \cdots, \mathfrak{A}_k = l; \langle A; \sigma^k_{\mathfrak{A}_k}\rangle$ *конечной сигнатуры таких, что для любой более богатой чем* $\mathfrak{A}$ *алгебры* $\mathfrak{A}' = \langle A; \sigma'_{\mathfrak{A}'}\rangle$ *алгебра* $\mathfrak{A}'$ *более богата, чем некоторая из* $\mathfrak{A}_i$ *(*$i \leq k$*), то алгебра* $\mathfrak{A}$ *изолирована.*

В частности, любая предпримальная конечная алгебра конечной сигнатуры (т.е. такая, что $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ коатом решетки L_A) является изолированной.

Представляет интерес нахождение изолированных алгебр среди классических алгебр: групп, колец, решеток и т.п.

В работе [8] доказано, что совокупность изолированных точек пространства $\langle F_A; \varrho\rangle$ всюду плотна в совокупности дискриминаторных клонов пространства F_A. Таким образом, для любой дискриминаторной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_{\mathfrak{A}}\rangle$ и любого натурального n существует изолированная универсальная алгебра $\mathfrak{L} = \langle A; \sigma_{\mathfrak{L}}\rangle$ такая, что совокупности функций $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})^{(n)}$ и $\mathrm{Tr}(\mathfrak{L})^{(n)}$ сопряжены некоторой перестановкой множества A.

Список литературы

[1] E. Post, Two-valued iterative systems of mathematical logic, Princton: Princton univ. Press, 1941.

[2] Yu. I. Yanov, A. A. Muchnik, On existence of k-valued closed classes without finite basis, DAN SSSR, **127**, 1 (1959), 44–46. (Russian)

[3] A. G. Pinus, Conditional terms and its applications in algebra and computional theory, Uspehi mat. nauk, **56**, 4 (2001), 37–72. (Russian)

[4] A. G. Pinus, S. V. Zhurkov, Scales of computational potentials of finite algebras: results and problems, Fundamental and applied Mathematic, **9**, 3 (2003), 145–164. (Russian)

[5] I. Rosenberg, Über die funktionale Vollstandigkeit in dem mehrvertigen Logiken von mehreren Verandlichen auf endlichen Mengen, Rozpravy Cs. Akademie Ved., Ser. Math. Nat. Sci., **80** (1970), 3–93.

[6] I. Rosenberg, Minimal clones I: The five types, Colloq. Math. Soc. J. Boleai, **43** (1981), 635–652.

[7] A. G. Pinus, Dimensions of functional clones. Metric on their collection, Sib. Elektron. Mat. Izv., **13** (2016), 366–374. (Russian)

[8] A. G. Pinus, On neighbourdhoods and isolated points in spaces of functional clones on sets, to appear. (Russian)

[9] D. M. Smirnov, Varieties of algebras, Publ. “Nauka”, Novosibirsk, 1992. (Russian)

[10] C. Garcia, W. Taylor, The lattice of interpretability of varieties, Memoirs of the Amer. Math. Soc., **50**, 305 (1984).

О СОВОКУПНОСТЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

А. Г. Пинус

Novosibirsk State Technical University,
20 K. Marx ave., Novosibirsk, 630073, Russia
e-mail: ag.pinus@gmail.com

Понятие алгебраического множества (совокупности решений в данной универсальной алгебре некоторой, возможно бесконечной, системы термальных уравнений) относится к основополагающим понятиям так называемой алгебраической геометрии универсальных алгебр (см., к примеру, [1,2]).

При этом сама совокупность алгебраических множеств $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{A}$ универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ может быть рассмотрена как некоторая производная структура по отношению к исходной алгебре $\mathfrak{A}$. Однако здесь возникает некоторая сложность: традиционно под производной структурой для алгебры $\mathfrak{A}$ понимают некоторую классическую алгебру: группу, полугруппу, решетку и пр., определимую по исходной алгебре $\mathfrak{A}$ и отражающую те или иные свойства алгебры $\mathfrak{A}$: группу автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$, полугруппу ее эндоморфизмов, решетку ее подалгебр, решетку ее конгруэнций и так далее. Однако подобная ситуация не может быть непосредственно перенесена на совокупность $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{A}$ в силу того, что элементы этой совокупности являются подмножествами множества A^n при произвольных отличных друг от друга натуральных значениях n. Выходят из этого положения, рассматривая вместо совокупности $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{A}$ последовательность $\langle \mathrm{Alg}_1\mathfrak{A}, \mathrm{Alg}_2\mathfrak{A}, \dots, \mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}, \dots \rangle$, где $\mathrm{Alg}_n\mathfrak{A} = \mathrm{Alg}\,\mathfrak{A} \cap P(A^n)$. Здесь $P(B)$ — совокупность всех подмножеств множества B. При этом $\mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}$ (для любого фиксированного n) представляет собой некоторую полную решетку относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$. И, как относительно любой другой производной структуры универсальных алгебр, возникают два традиционных вопроса с ней связанных: ее абстрактное и конкретное описания. То есть нахождение условий для полной решетки L, при которых она изоморфна решетке $\mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}$ для некоторой универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ и нахождение условий на совокупность B (решетку относительно $\subseteq$) подмножеств множества A^n, при которых B совпадает с совокупностью $\mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}$ для некоторой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$. В связи с этим отметим, что в работах [3,4] доказано, что любая полная решетка изоморфна решетке $\mathrm{Alg}_1\mathfrak{A}$ для некоторой алгебры $\mathfrak{A}$. Остальные вопросы относительно решеток $\mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}$ остаются открытыми в настоящее время.

Традиционно в дальнейшем будем отождествлять n-местные отношения на множестве A с соответствующими подмножествами множества A^n.

В настоящей работе будет предложено рассмотрение совокупности $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{A}$ (для универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$) на основе некоторой полугруппы из элементов множества $\bigcup\limits_{n\geq 1} P(A^n)$ и предложено некоторое конкретное описание совокупности $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{A}$ в терминах этой полугруппы и ряда теоретико-множественных операций над подмножествами множеств A^n $(n \in \omega\ )$.

Речь пойдет об известном обобщении понятия произведения бинарных отношений $Q_1 \circ Q_2$ для любых $A, Q_1, Q_2 \subseteq A^2$ (для $a_1, a_2 \in A$ $\langle a_1, a_2\rangle \in Q_1 \circ Q_2 \Leftrightarrow$ существует $a_3 \in A$ такое, что $\langle a_1, a_3\rangle \in Q_1$ и $\langle a_3, a_2\rangle \in Q_2$). Более общо: для любых $Q_1 \subseteq A^n$, $Q_2 \subseteq A^m$ и любых $a_1, \ldots, a_{n-1}, b_2, \ldots, b_m$ из A: $\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, b_2, \ldots, b_m\rangle \in Q_1 \circ Q_2 \Leftrightarrow$ существует $c \in A$ такое, что $\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, c\rangle \in Q_1$ и $\langle c, b_2, \ldots, b_m\rangle \in Q_2$. Известно обобщение этой операции над отношениями на случай произвольной совокупности отношений любой арности над множеством A: так называемые обобщенные произведения отношений предложенные Л. Сабо [5] (см. также [6]).

Пусть $X = \{x_i | i \in I\}$ — некоторое множество переменных и P — совокупность некоторых отношений на множестве A. Под схемой отношений над P от X понимают произвольную тройку $\Psi = \langle X; \sum; \langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\rangle\rangle$, где $\sum$ — некоторая совокупность формул вида $Q(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$ для $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s} \in X$, Q — некоторое из s-местных отношений, входящих в P и $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — фиксированный кортеж переменных из X. Скажем, что совокупность $\langle a_i | i \in I\rangle$ элементов из A удовлетворяет совокупности формул $\sum$, если $\langle a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}\rangle \in Q$ для любой формулы $Q(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$, входящей в $\sum$. Через R_Ψ обозначим n-местное отношение на A (некоторое обобщенное произведение отношений из P) такое, что $R_\Psi = \{\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\rangle |$ существует совокупность $\langle a_i | i \in I\rangle$ элементов из A, удовлетворяющая совокупности формул $\sum\}$.

Довольно очевидно и хорошо известно, что такие операции над отношениями, как конечные и бесконечные конъюнкции, перестановки аргументов, отождествления аргументов, введение фиктивных аргументов, произведения отношений и прочие являются частными случаями обобщенных произведений отношений. Для любой совокупности P отношений на множестве A через $\mathrm{G-Prod\,P}$ обозначим совокупность всех отношений на A, представимых как некоторое обобщенное произведение отношений из P.

Для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на множестве A и любой перестановки π на множестве $\{1,\dots,n\}$ под *π-графиком функции f* будем понимать подмножество $\mathrm{Gr}_\pi\, f$ множества A^{n+1} следующего вида

$$\{\langle a_{\pi(1)},\dots,a_{\pi(n)},b\rangle\in A^{n+1}\mid f(a_1,\dots,a_n)=b\}.$$

График функции f есть любое из множеств вида $\mathrm{Gr}_\pi f$, где π — произвольная перестановка на $\{1,\dots,n\}$. Подмножества множеств A^n, являющиеся графиками функций на A, назовем функциональными.

Совокупность D функциональных отношений на множестве A назовем *замкнутой относительно перестановок аргументов*, если для любого $Q\in D\cap P(A^{n+1})$ отношение

$$Q_\pi=\{\langle a_{\pi(1)},\dots,a_{\pi(n)},b\rangle\mid\langle a_1,\dots,a_n,b\rangle\in Q\}$$

также входит в D для любой перестановки π на $\{1,\dots,n\}$.

Для любых функций $f(x_1,\dots,x_m)$, $g(x_1,\dots,x_n)$ на множестве A отношение $\mathrm{Gr}_{\pi_0} f\circ\mathrm{Gr}_{\pi_0'} g$ (где π_0,π_0' — тождественные перестановки на множествах $\{1,\dots,m\}$ и $\{1,\dots,n\}$ соответственно) является функциональным и очевидно, что $\mathrm{Gr}_{\pi_0} f\circ\mathrm{Gr}_{\pi_0'} g=\mathrm{Gr}_{\pi_0''} h$, где
$h(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{m+n_1})=g(f(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1})$ и π'' — тождественная перестановка на $\{1,\dots,m+n-1\}$.

Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma\rangle$ через $\mathrm{Gr}\sigma_{\mathfrak{A}}$ обозначим совокупность всех графиков сигнатурных функций алгебры $\mathfrak{A}$ вкупе со всеми графиками всех селекторных функций на множестве A. Совокупность $\mathrm{Gr}\sigma_{\mathfrak{A}}$ является совокупностью функциональных отношений, замкнутой относительно перестановок аргументов. Через $\langle S\rangle$ обозначим замыкание произвольной совокупности S функциональных отношений на множестве A во множестве $\bigcup\limits_{n\geq 1}P(A^n)$ относительно операции $\circ$. Очевидным образом, совокупность $\langle Gr\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle$ представляет собой совокупность всех графиков всевозможных термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$ и, при этом, $\langle\mathrm{Gr}\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle\subseteq\mathrm{Alg}\mathfrak{A}$, а $\langle\langle\mathrm{Gr}\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle;\circ\rangle$ является полугруппой.

Для любого отношения $Q\subseteq A^n$ через $Q^\cup$ обозначим отношение

$$\{\langle a_n,a_1,\dots,a_{n-1}\rangle\mid\langle a_1,\dots,a_n\rangle\in Q\}.$$

Операцию $*$ на функциональных отношениях на множестве A определим следующим образом. Для функций $f(x_1,\dots,x_m)$ и $g(y_1,\dots,y_n)$ на множестве A через $\{z_1,\dots z_s\}$ обозначим объединение переменных $\{x_1,\dots,x_m\}$ и $\{y_1,\dots,x_n\}$, и пусть при этом $x_i=z_{j_i}$ (для $i=1,\dots,m$), $y_i=z_{l_i}$ (для $i=1,\dots,n$). Пусть $Q_1=\mathrm{Gr}_{\pi'}f$, $Q_2=\mathrm{Gr}_{\pi''}g$, где π',π'' — тождественные перестановки на $\{1,\dots,m\}$ и $\{1,\dots,n\}$ соответственно. Положим

$$Q_1*Q_2=Q_1\circ Q_2^\cup=\{\langle c_1,\dots,c_s\rangle\mid \text{для некоторого } d\in A$$
$$\langle c_{j_1},\dots,c_{j_m},d\rangle\in Q_1,\ \langle c_{l_1},\dots,c_{l_n},d\rangle\in Q_2\}.$$

Таким образом, $\mathrm{Gr}_{\pi'}f * \mathrm{Gr}_{\pi''}g$ — совокупность решений на множестве A уравнения $f(x_1,\ldots,x_m) = g(y_1,\ldots,y_n)$. Очевидно, что операция $*$ является обобщенным произведением отношений.

Для любой совокупности D функциональных отношений на множестве A через D^* обозначим совокупность отношений вида $Q_1 * Q_2$ для $Q_1, Q_2 \in D$, а также отношений, получаемых из них всевозможными перестановками аргументов. Тем самым $\langle \mathrm{Gr}\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle^*$ является совокупностью решений в алгебре $\mathfrak{A}$ всех термальных уравнений этой алгебры, т.е., в частности, $\langle \mathrm{Gr}\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle^* \subseteq \mathrm{Alg}\,\mathfrak{A}$ и $\langle \mathrm{Gr}\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle^* \subseteq \mathrm{GProdGr}\sigma_{\mathfrak{A}}$.

Для любой совокупности D отношений на множестве A через $\cap D$ обозначим совокупность отношений, являющихся пересечениями некоторой совокупности отношений $C \subseteq D \cap P(A^n)$ для некоторого n.

Тем самым, $\cap\langle \mathrm{Gr}\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle^* = \mathrm{Alg}\mathfrak{A}$ и $\cap\langle \mathrm{Gr}\sigma_{\mathfrak{A}}\rangle^* \subseteq \mathrm{GProdGr}\sigma_{\mathfrak{A}}$.

В конечном итоге имеет место

Теорема 1. *Совокупность D отношений на основном множестве A алгебры $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$ является совокупностью всех алгебраических множеств этой алгебры тогда и только тогда, когда D имеет вид $\cap\langle S\rangle^*$ для некоторой замкнутой относительно перестановок аргументов совокупности S функциональных отношений на A.*

При этом в качестве сигнатурных функций алгебры $\mathfrak{A}$ можно выбрать функции на A, графики которых и составляют совокупность S.

Список литературы

[1] B. I. Plotkin, Some concepts of algebraic geometry in universal algebra, St. Peterburg Math. J., **9**, 4 (1998), 859–879.

[2] E. Yu. Daniyarova A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, Algebraic geometry on algebraic systems, Publ. of SO RAN, Novosibirsk, 2016. (Russian)

[3] A. G. Pinus, On geometrically near algebras, Algebra and Model Theory 7, Publ. of NSTU, Novosibirsk, 2009, 85–95. (Russian)

[4] A. G. Pinus, On lattices of algebraic subsets of universal algebras, Algebra and Model Theory 8, Publ. of NSTU, Novosibirsk, 2011, 67–72. (Russian)

[5] L. Szabo, Concrete representation of related structures of universal algebras, Acta Sci. Math., **40** (1978), 175–184.

[6] A. G. Pinus, Derived structures of universal algebras, Publ of NSTU, Novosibirsk, 2007. (Russian)

ОБЗОР ПО ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫМ МЕТАБЕЛЕВЫМ ГРУППАМ И ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫМ (МЕТАБЕЛЕВЫМ) АЛГЕБРАМ ЛИ

Е. Н. Порошенко, Е. И. Тимошенко*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: auto_stoper@ngs.ru, eitim45@gmail.com

1 Частично коммутативные метабелевы группы

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие групп. Добавив к определяющим соотношениям (свободной) частично коммутативной группы F_Γ тождества многообразия, получим частично коммутативную группу $F_\Gamma(\mathfrak{M})$ многообразия $\mathfrak{M}$, соответствующую графу Γ. Множество вершин этого графа обозначим через $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, а множество ребер — через E. Если многообразие содержит многообразие всех двуступенно нильпотентных групп, то группа $F_\Gamma(\mathfrak{M})$ обладает тем свойством, что две вершины x_i и x_j перестановочны тогда и только тогда, когда они смежны в графе Γ.

Частично коммутативная метабелева группа M_Γ задана представлением

$$M_\Gamma = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, [x_i, x_j] = 1, \text{ если } (x_i, x_j) \in E; \;\; \mathfrak{A}^2 \rangle$$

в многообразии метабелевых групп $\mathfrak{A}^2$. Многообразие $\mathfrak{A}^2$ состоит из всех групп, удовлетворяющих тождеству $[[x, y], [u.v]] = 1$.

Основные понятия и результаты теории частично коммутативных метабелевых групп изложены [1].

При изучении свойств группы M_Γ важно понимать, что её коммутант M'_Γ является $A = (\mathbb{Z}[M_\Gamma/M'_\Gamma])$-модулем. Действие элементов из M_Γ/M'_Γ

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект 18-01-00100

на M'_Γ определено как сопряжение $c^g = gcg^{-1}, c \in M'_\Gamma$, $g \in M_\Gamma/M'_\Gamma$. Фактически A — это кольцом многочленов Лорана от переменных $a_i = x_i M'_\Gamma$. Для $\gamma = m_1 g_1 + \ldots + m_l g_l$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $g_i \in M_\Gamma/M'_\Gamma$, $c^\gamma = (c^{m_1})^{g_1} \ldots (c^{m_l})^{g_l}$.

Перечислим некоторые свойства группы M_Γ :

1). [2] *Пусть $Y = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$ — подмножество множества вершин X графа Γ. Тогда подгруппа группы M_Γ, порожденная множеством Y, изоморфна группе M_Δ, где Δ — полный подграф графа Γ на множестве вершин Y. Существует ретракция $M_\Gamma \to M_\Delta$.*

2). [3] *Пересечение центра $\mathcal{Z}$ и коммутанта M'_Γ тривиально.*

3). [3] *Если группа M_Γ нильпотентна, то она абелева.*

4). [3] *Центр $\mathcal{Z}(M_\Gamma)$ либо единичный, либо имеет прямое разложение $\mathcal{Z}(M_\Gamma) = гр\langle x_{i_1} \rangle \times \ldots \times гр\langle x_{i_m} \rangle$.*

5). [3] *Пусть элементы $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ порождают центр $\mathcal{Z}$ группы M_Γ и Δ — подграф Γ, порожденный множеством вершин $X \setminus \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$. Тогда фактор-группа $M_\Gamma/\mathcal{Z}(M_\Gamma)$ является частично коммутативной метабелевой группой, изоморфной M_Δ.*

Определим для любых несмежных вершин x_i, x_j идеал $\mathcal{A}^\Gamma_{i,j}$ кольца A. Если вершины x_i, x_j лежат в разных компонентах связности графа Γ, то полагаем $\mathcal{A}^\Gamma_{i,j} = 0$. В противном случае рассмотрим все пути $\{x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}, x_j\}$ между вершинами x_i и x_j. Каждому пути поставим в соответствие элемент $(1-a_{i_1}) \ldots (1-a_{i_m})$ кольца A. Идеал $\mathcal{A}^\Gamma_{i,j}$ порожден всеми такими элементами.

Пусть c — некоторый элемент из коммутанта M'_Γ. Его аннулятором $\mathrm{Ann}(c)$ называют идеал кольца A, состоящий из всех элементов α с условием $c^\alpha = 1$.

Следующие две теоремы дают описание аннуляторов "ребер $[x_i, x_j]$" и централизаторов вершин.

Теорема 1.1. [2]. *Пусть количество вершин n графа Γ не менее 2. Если вершины x_i, x_j не смежны, то аннулятор коммутатора $[x_i, x_j]$ совпадает с идеалом $\mathcal{A}^\Gamma_{ij}$.*

Теорема 1.2. [2] *Элемент g из M_Γ лежит в централизаторе $C(x_1)$ элемента x_1 тогда и только тогда, когда*

$$g = x_1^{l1} \ldots x_m^{lm} \prod_{1<i<j\leq m} [x_i, x_j]^{\alpha_{ij}},$$

где $x_2, \ldots, x_m$ — все вершины, смежные с x_1,, $l_1, \ldots, l_m$ — целые числа, α_{ij} — любые элементы из A.

Теорема 1.3 позволяет находить централизатор $\mathcal{C}(g) = C(g) \cap M'_\Gamma$ любого элемента g группы M_Γ в её коммутанте.

Теорема 1.3. [3]. *Для любой частично коммутативной метабелевой группы M_Γ, любых $1 \leq i_1 < \ldots i_m \leq n$ и ненулевых целых $q_1, \ldots, q_m$ имеет место*

$$\mathcal{C}\left(x_{i_1}^{q_1} \ldots x_{i_m}^{q_m}\right) = \mathcal{C}\left(x_{i_1}\right) \cap \ldots \cap \mathcal{C}\left(x_{i_m}\right).$$

Теорема 1.4. [3]. *Частично коммутативная метабелева группа M_Γ аппроксимируется нильпотентными группами без кручения.*

Говорят, что *централизаторная размерность* группы G равна n, если в G найдутся подмножества $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$, централизаторы которых $C(A_1) > C(A_2) \ldots > C(A_n)$ строго убывают и n — наибольшее число с этим свойством. Будем обозначать централизаторную размерность через $\mathrm{Cdim}(G)$. Если наибольшего n не существует, то $\mathrm{Cdim}(G) = \infty$.

Оказывается [5], что для любой частично коммутативной метабелевой группы M_Γ имеет место

$$\mathrm{Cdim}(M_\Gamma) \leq 2n + 1,$$

где n — число вершин определяющего графа.

Теорема 1.5. [4]. *Пусть Γ — дерево, количество вершин которого не менее* 3. *Если Γ — звезда, то* $\mathrm{Cdim}(M_\Gamma) = 3$. *В противном случае* $\mathrm{Cdim}(M_\Gamma) = 5$.

Теорема 1.6. [5]. *Если частично коммутативная метабелева группа M_Γ определена циклом длины $n \geq 5$, то* $\mathrm{Cdim}(M_\Gamma) = 7$.

Напомним, что множество всех предложений групповой сигнатуры, истинных на группе G, называется элементарной теорией группы.

Теорема 1.7. [2]. *Элементарные теории двух частично коммутативных метабелевых групп M_Γ и M_Δ совпадают тогда и только тогда, когда графы* Γ *и* Δ *изоморфны.*

Универсальной теорией группы G называется множество всех предложений вида $\exists u_1 \ldots u_m \Phi(u_1, \ldots, u_m)$, где $\Phi(u_1, \ldots, u_m)$ – формула групповой сигнатуры, не содержащая кванторов, истинных на группе G. Легко заметить, что из совпадения универсальных теорий двух групп следует совпадение их централизаторных размерностей. В [6] приведены необходимы и достаточные условия для совпадения универсальных теорий групп, определенных ациклическими графами. Чтобы сформулировать эту теорему, напомним, что вершина графа называется *висячей,* если её степень равна единице.

Пусть $W = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} \subseteq V(\Gamma)$ множество всех висячих вершин графа Γ. Удалим из Γ все вершины W вместе с инцидентными им рёбрами. Полученный граф обозначаем Γ^*.

Теорема 1.8. [6]. *Пусть* Γ *и* Δ *— леса, причем каждая компонента связности графов* Γ *и* Δ *содержит не менее трёх вершин. Тогда и только тогда универсальные теории групп* M_Γ *и* M_Δ *совпадают, когда графы* Γ^* *и* Δ^* *изоморфны.*

В [7] также изучается вопрос об универсальной эквивалентности частично коммутативных метабелевых групп. На множестве вершин X определяющего графа Γ задается некоторое отношение эквивалентности, а на множестве классов эквивалентности отношение смежности. Таким образом, возникает новый граф, называемый сжатием исходного, часто более простой, чем исходный. Так, например, исходный граф может содержать циклы, а его сжатие быть деревом. Доказано, что универсальные теории частично коммутативных метабелевых групп, определенных графом Γ и его сжатием, совпадают. В этой работе также установлено, что две частично коммутативные метабелевы группы, определенные циклами, универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда эти циклы изоморфны.

В работах [8] и [9] исследуются свойства и универсальные теории частично коммутативных групп G_Γ из пересечения $\mathfrak{A}^2 \wedge \mathfrak{N}_c$ многообразий всех метабелевых групп и всех нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше заданного числа c. В первой из этих работ найдена мальцевская база группы G_Γ, а во второй она используется для доказательства свойств группы G_Γ и её универсальной теории. Сначала доказываются теоремы о строении аннуляторов элементов из коммутанта группы G_Γ, а затем две теоремы дают описание централизаторов. Они являются аналогами теорем 1.1, 1.2 и 1.3. Следующая теорема утверждает, что в том случае, когда определяющим графом группы является дерево, пересечение централизаторов различных вершин и коммутанта G'_Γ совпадает с последним неединичным коммутантом группы G_Γ. Используя полученные факты, сравниваются универсальные теории частично коммутативных нильпотентных метабелевых групп. Так формулируются условия на определяющие графы двух частично коммутативных нильпотентных метабелевых групп, достаточные для совпадения их универсальных теорий. Следующая теорема относится к частично коммутативным метабелевым группам M_Γ. Приводятся условия на определяющие графы, достаточные для универсальной эквивалентности двух частично коммутативных метабелевых групп. Наконец получен критерий универсальной эквивалентности двух частично коммутативных метабелевых нильпотентных групп, определенных деревьями. Также как в теореме 1.8, эти условия очень просты и их можно легко проверить.

Основные результаты статьи [10] — две теоремы о квазимногообразии, порожденном частично коммутативной метабелевой группой. Одна из них позволяет представить частично коммутативную метабелеву группу как подгруппу прямого произведения абелевых групп без кручения и метабелевых произведений абелевых групп без кручения. Из нее следует, что любые частично коммутативные метабелевы (неабелевы) группы порождают одинаковые квазимногообразия и предмногообразия. Другая показывает, что напротив для свободных частично коммутативных групп существует бесконечная цепочка различных квазимногообразий, порожденных этими группами.

В [14] исследуются автоморфизмы частично коммутативных метабелевых групп. На моноиде $\mathcal{P}$ матриц порядка r определяется конгруэнция $\approx$. Доказано, что группа автоморфизмов, действующих тождественно на фактор-группе по коммутанту M_Γ/M'_Γ, изоморфна фактор-моноиду $\mathcal{P}/\approx$.

Порождающее множество группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_\Gamma)$ нашел Лоуренс [16]. Он определил четыре множества автоморфизмов, которые в совокупности порождают группу $\mathrm{Aut}(F_\Gamma)$:

- Множество *графовых автоморфизмов,* то есть тех элементов группы $\mathrm{Aut}(F_\Gamma)$, которые индуцированы автоморфизмами $\pi : \Gamma \to \Gamma$ графа Γ;

- Множество *обращающих автоморфизмов* $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_\Gamma)$, которые отображают одну из вершин $x_i \in X$ в x_i^{-1} и фиксируют остальные вершины;

- Рассмотрим любые две различные вершины x_i, x_j, удовлетворяющие следующему условию: если $x \in X$ и $(x_j, x) \in E$, то $(x_i, x) \in E$. Третье множество составляют *трансвекции,* фиксирующие все вершины кроме x_j и отображающие x_j в $x_j x_i^{\pm 1}$ или $x_i^{\pm 1} x_j$.

- Четвертое множество составляют *локально внутренние автоморфизмы;* они определены так: для $x_i \in X$ рассмотрим подграф Δ, полученный удалением вершины x_i и всех вершин, смежных с x_i, а также всех ребер, инцидентных удаленным вершинам; пусть Λ — объединение каких-либо компонент связности графа Δ; определим действие $\beta \in \mathrm{Aut}(F_\Gamma)$ полагая, $\beta(x_j) = x_i^{-1} x_j x_i$ при $x_j \in \Lambda$ и $\beta(x_j) = x_j$, если $x_j \notin \Lambda$.

В работе Г. А. Носкова [12] дано описание образа группы $\mathrm{Aut}(F_\Gamma)$ при действии отображения абелизации $\alpha : F_\Gamma \to F_\Gamma/F'_\Gamma$.

Из результатов работы [13] следует, что если определяющий граф Γ имеет не менее трех компонент связности, каждая из которых — полный граф, то группа $\mathrm{Aut}(M_\Gamma)$ не порождается автоморфизмами, индуцированными автоморфизмами Лоуренса.

В [14] показано большее, а именно, если Γ — связный граф или даже дерево, то группа $\mathrm{Aut}(M_\Gamma)$ может содержать автоморфизмы, не индуцированные автоморфизмами группы F_Γ. В той же работе определен некоторый моноид $\mathcal{P}$ матриц над кольцом $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ целочисленных многочленов Лорана и на нем конгруэнция $\approx$ так, что группа автоморфизмов, действующих тождественно на фактор-группе M_Γ/M'_Γ, изоморфна фактор-моноиду $\mathcal{P}$ по этой конгруэнции.

В работе В. Н. Ремесленникова и А. В. Трейера [15] описана структура автоморфизмов для частично коммутативных двуступенно нильпотентных R-групп $G_{\Gamma,R}$.

Вершину x графа Γ назовём *внутренней,* если она не висячая и не изолированная, то есть $\deg(x) > 1$.

Автоморфизм α некоторой группы G, действующий тождественно на фактор-группе $G_{ab} = G/G'$, называется IA-автоморфизмом.

Приведем несколько новых результатов об автоморфизмах частично коммутативных метабелевых групп, полученных одним из авторов обзора.

Теорема 1.9. *Предположим, что определяющий граф* Γ *частично коммутативной метабелевой группы* M_Γ *не содержит циклов. Если* IA-*автоморфизм* α *группы* M_Γ *оставляет неподвижными все висячие и изолированные вершины графа* Γ*, то* α *— тождественный автоморфизм.*

Показано, что ни одно из ограничений, а именно, об отсутствии циклов в графе Γ и о действии α тождественно на фактор-группе по коммутанту, исключить из условий теоремы нельзя.

Каждый автоморфизм α группы M_Γ индуцирует некоторый автоморфизм $\overline{\alpha}$ свободной абелевой группы M_Γ/M'_Γ. Группа индуцированных автоморфизмов называется в [15] *группой факторных автоморфизмов группы* M_Γ/M'_Γ. Обозначим группу факторных автоморфизмов группы M_Γ/M'_Γ через $\mathcal{F}_\Gamma$. Как обычно, $\mathrm{IAut}(G)$ — группа IA-автоморфизмов некоторой группы G. Очевидно, что $\mathcal{F}_\Gamma \cong Aut(M_\Gamma)/\mathrm{IAut}(M_\Gamma)$.

Затем определим группу матриц $\mathcal{M}_\Gamma$. Автоморфизм $\overline{\alpha}$ группы M_Γ/M'_Γ называется *матричным,* если его матрица $[\overline{\alpha}]$ в некотором базисе, выбранном по графу Γ, принадлежит группе матриц $\mathcal{M}_\Gamma$. Имеет место

Теорема 1.10. *Пусть граф* Γ *не содержит циклов. Тогда каждый факторный автоморфизм группы* M_Γ *можно записать как произведение автоморфизма графа* Γ *и матричного автоморфизма.*

Напомним, что две группы G и H называются *соизмеримыми,* если найдутся подгруппы G_1 из G и H_1 из H конечного индекса, соответственно, в G и H такие, что $G_1 \cong H_1$.

Предположим, что линейная алгебраическая группа A является $\mathbb{Q}$-определенной. Это означает, что $A \leq GL(n, \mathbb{C})$ и её основное множество определяется системой уравнений с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Подгруппа $B \leq A \cap GL(n, \mathbb{Q}) = A_{\mathbb{Q}}$, соизмеримая с $A_{\mathbb{Z}} = A \cap GL(n, \mathbb{Z})$, называется арифметической группой (или арифметической подгруппой в A).

Один из результатов работы [12] состоит в том, что группа факторных автоморфизмов группы F_Γ/F_Γ', где Γ — конечный граф, является арифметической.

Теорема 10 из [8] утверждает, что если $R = \mathbb{Z}$ либо R — поле нулевой характеристики, то образ группы $\mathrm{Aut}(G_{\Gamma,R})$ при отображении абелизации является R-арифметической группой.

Аналогичный результат получен для частично коммутативных метабелевых групп, определенных графами без циклов.

А именно, из описания группы матричных автоморфизмов $\mathcal{M}_\Gamma$, данного в четвертом параграфе, следует, что эта группа является арифметической. Группа автоморфизмов конечного графа конечна. Из теоремы 1.2 следует, что группы матричных автоморфизмов и факторных автоморфизмов соизмеримы. Поэтому справедлива

Теорема 1.11. *Пусть граф Γ не содержит циклов. Тогда группа факторных автоморфизмов группы M_Γ/M_Γ' является арифметической.*

Вопросы, связанные с вложением группы M_Γ в группу матриц, изучаются в [11].

2 Частично коммутативные (метабелевы) алгебры Ли

Определение частично коммутативной алгебры Ли на некотором многообразии аналогично определению частично коммутативной группы. Пусть $G = \langle A; E \rangle$ — некоторый неориентированный граф без петель с (возможно бесконечным) множеством вершин A и множеством ребер E. В случае если вершины a и b соединены ребром в графе G, то мы будем использовать обозначение $a \overset{G}{\leftrightarrow} b$. Частично коммутативная алгебра Ли многообразия $\mathfrak{A}$ над произвольной областью целостности R получается из свободной алгебры этого многобразия факторизацией по следующему множеству определяющих соотношений

$$[a_i, a_j] = 0, \text{ где } a_i \overset{G}{\leftrightarrow} a_j \tag{1}$$

(здесь и далее $[a, b]$ — так называемая *лиева скобка*, обозначающая лиево произведение элементов a и b).

Пусть $G = \langle A; B\rangle$ — граф и $B \subseteq A$. Подграф графа G, порожденный множеством вершин B будем обозначать $G(B)$. Наоборот, если граф H — является подграфом графа $G = \langle A; B\rangle$, то множество вершин графа H обозначим через $A(H)$.

В этом разделе частично коммутативную и частично коммутативную метабелеву алгебры Ли, определенную графом $G = \langle A, E\rangle$, над областью целостности R будем обозначать $\mathcal{L}_R(A; G)$ и $\mathcal{M}_R(A; G)$ соответственно, если нет необходимости уточнять, над каким кольцом берется алгебра, будем опускать нижний индекс в обозначениях и писать просто $\mathcal{L}(A; G)$ и $\mathcal{M}(A; G)$ соответственно. Так как в метабелевой алгебре Ли расстановка скобок на ненулевом произведении порождающих может быть только лево- или правонормированной (причем, очевидно, как из левонормированного монома получить равный ему в свободной метабелевой алгебре Ли правонормированный и наоборот), в частично коммутативных метабелевых алгебрах мы будем рассматривать только элементы с левонормированной расстановкой скобок и, соответственно, в написании будем опускать все пары скобок, кроме внешней.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. *Мультистепенью* лиевского монома $[u]$ над множеством порождающих A называется вектор $\overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots)$, где δ_i — это число вхождений элемента a_i в моном $[u]$. Через $\mathrm{supp}([u])$ обозначим множество всех порождающих a_i, входящих в запись $[u]$, т.е.

$$\mathrm{supp}([u]) = \{a_i \mid \delta_i \neq 0\}.$$

Для лиевого многочлена $f = \sum_j \alpha_j[u_j]$, где $\alpha_j \neq 0$ положим $\mathrm{supp}(f) = \bigcup j\mathrm{supp}([u_j])$.

Одним из фундаментальных результатов в теории частично коммутативных алгебр, правда ассоциативных является следующий, полученный совместно К. Х. Кимом, Л. Макар-Лимановым, Дж. Неггерсом и Ф. В.,Роушем

Теорема 2.1. [17]. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, G и H — конечные неориентированные графы без петель, тогда частично коммутативные ассоциативные алгебры $\mathbb{F}(G)$ и $\mathbb{F}(H)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $G \simeq H$.*

Впрочем справедлив и аналог этого результата для алгебр Ли, полученный Д. Душампом и Г. Кробом для более общего случая: для алгебр Ли над областью целостности.

Теорема 2.2. [18]. *Пусть R — область целостности, G и H — конечные неориентированные графы без петель, с множествами вершин*

A и B соответственно. Тогда частично коммутативные алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A;G)$ и $\mathcal{L}_R(B;H)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $G \simeq H$.

Из-за сходства объектов многие результаты, полученные для частично коммутативных групп, имеют аналоги для частично коммутативных алгебр Ли. Также следует отметить, что многие методы для исследования частично коммутативных алгебр Ли являются адаптацией аналогичных методов для частично коммутативных групп. Однако, следует отметить, что есть и специфические методы исследования алгебр Ли. Так, значительную роль играют описание линейных базисов частично коммутатмвных алгебр Ли.

Первый результат, касающийся базисов частично коммутативных алгебр Ли, был получен уже упоминавшимися выше Д. Душампом и Г. Кробом в работе [19]. Однако в этой статье нет явного описания базисов, а описан рекурсивный процесс, суть которого в том, что в графе выделяется вполне несвязное подмножество его вершин и задача сводится к нахождению базиса для частично коммутативной алгебры Ли, определяющий граф которой порожден остальными вершинами. Явное описание базисов частично коммутативных алгебр Ли было получено одним из авторов этого обзора. Для этого описания нам потребуется понятие частично коммутативных слов Линдона – Ширшова.

Для частично коммутативной алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A;G)$ над областью целостности R определим по индукции *частично коммутативные слова Линдона — Ширшова* (*PCLS-слова*).

1. Элементы множества A являются PCLS-словами.
2. слово Линдона — Ширшова $[u]$, такое что $\ell([u]) > 1$ является PCLS-словом, если $[u] = [[v],[w]]$, где $[v]$ и $[w]$ — PCLS-слова, причем в графе G первая буква слова $[w]$ не соединена ребром хотя бы с одной буквой слова $[v]$.
3. Других PCLS-слов нет.

Множество всех PCLS-слов частично коммутативной алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A;G)$ обозначим $PCLS(A;G)$.

Тогда описание базисов частично коммутативных алгебр Ли дает следующая теорема, при доказательстве которой использовался метод базисов Грёбнера — Ширшова.

Теорема 2.3. *Пусть R — область целостности и G — неориентированный граф без петель, с множеством вершин A. Тогда множество всех PCLS-слов является базисом частично коммутативной R-алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A;G)$.*

Вопрос нахождения базисов частично коммутативных метабелевых алгебр Ли также представляет определенный интерес.

В [21] и [22] были независимо построены базисы свободных полинильпотентных алгебр, в частности, базис свободной метабелевой алгебры, который состоит из элементов вида $[a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}]$, где $a_{i_1} > a_{i_2}$, $a_{i_2} \leqslant a_{i_3} \leqslant \cdots \leqslant a_{i_k}$. Обозначим это множество $\mathrm{Bas}(A)$.

В частично коммутативной метабелевой алгебре Ли $\mathcal{M}(A;G)$ через $B_{\overline{\delta},1}(A)$ обозначим множество всех мономов множества $\mathrm{Bas}(A)$, мультистепень которых равна $\overline{\delta}$. Удалим из этого множества все мономы $[u]$, такие что $[u] = 0$ в алгебре $\mathcal{M}(A;G)$. Обозначим полученное множество $B_{\overline{\delta},2}(A;G)$.

Для мономов $[u_1] = [a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}]$ и $[u_2] = [a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}]$ множества $B_{\overline{\delta},2}(A;G)$ будем писать $[u_1] \sim [u_2]$, если порождающие a_{i_1} и a_{j_1} лежат в одной компоненте подграфа $G(\mathrm{supp}([u_1])) = G(\mathrm{supp}([u_2]))$. Как следует из [23], если $[u_1] \sim [u_2]$, то $[u_1] = [u_2]$ Из каждого класса эквивалентности по отношению $\sim$ выберем по одному элементу таким образом, чтобы первая буква каждого выбранного элемента была наибольшей среди первых букв всех мономов соответствующего класса. Полученное множество обозначим $B_{\overline{\delta}}(A;G)$.

Положим
$$\mathrm{Bas}(A;G) = \bigcup_{\overline{\delta}} B_{\overline{\delta}}(A;G),$$
где объединение берется по всем мультистепеням.

Теорема 2.4. [23] *Пусть R — область целостности и G — неориентированный граф без петель. Множество $\mathrm{Bas}(A;G)$ является базисом частично коммутативной метабелевой R-алгебры Ли $\mathcal{M}_R(A;G)$.*

Как и в случае частично коммутативных групп в исследовании алгебр Ли заметную роль играют централизаторы. Для частично коммутативных алгебр Ли задачу описания централизаторов удалось решить в наиболее общей формулировке, то есть получено описание централизаторов всех элементов соответствующей алгебры Ли.

Централизатор элемента g будем обозначать $C(g)$. Пусть R — область целостности и L — произвольная R-алгебра Ли. Для элементов $f, g \in L$ будем писать $f \backsim g$, если $\alpha f = \beta g$ для некоторых $\alpha, \beta \in R$. Описание централизатора произвольного элементов дает следующая теорема.

Теорема 2.5. [24] *Пусть R — область целостности, G — неориентированный граф без петель с множеством вершин A, g — произвольный элемент частично коммутативной R-алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A;G)$ и $H_1, H_2, \ldots, H_p$ — компоненты связности графа $\overline{G}(\mathrm{supp}(g))$. Тогда $g = \sum_{i=1}^{p} g_i$, где $\mathrm{supp}(g_i) \subseteq A(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots p$ и $C(g)$ состоит из* *элементов вида* $h = \sum_{i=1}^{p} h_i + h^{(1)}$, *где для каждого* $i = 1, 2, \ldots p$ *либо* $h_i = 0$, *либо* $g_i \backsim h_i$, *а также* $\mathrm{supp}(g) \overset{G}{\leftrightarrow} \mathrm{supp}(h^{(1)})$.

Поскольку коммутант $\mathcal{M}'(A;G)$ частично коммутативной метабелевой алгебры Ли $\mathcal{M}(A;G)$ является $R[A]$-модулем, для любого элемента $g \in \mathcal{M}'(A;G)$ определен его аннулятор в кольце $R[A]$. Аналогично случаю частично коммутативных метабелевых групп определим идеал $I^G_{i,j}$ кольца многочленов $R[A]$ следующим образом. Если вершины a_i и a_j лежат в разных компонентах связности графа G, то положим $I^G_{i,j} = 0$. Если a_i и a_j лежат в одной компоненте связности, то каждому пути $(a_i, b_1, b_2, \ldots, b_s, a_j)$, соединяющему эти вершины в графе G, поставим в соответствие моном $b_1 b_2 \ldots b_s$ и определим $I^G_{i,j}$, как идеал, порожденный всеми такими мономами. Имеет место следующий аналог теоремы 1.1 для алгебр Ли.

Теорема 2.6. [23] *Пусть* R *— область целостности,* G *— неориентированный граф без петель с множеством вершин* A, $\mathcal{M}_R(A;G)$ *— частично коммутативная метабелева алгебра Ли с множеством порождающих* A *и определяющим графом* G. *Если вершины* a_i *и* a_j *не смежны, то аннулятор элемента* $[a_i, a_j]$ *совпадает с идеалом* $I^G_{i,j}$.

В случае частично коммутативных метабелевых алгебр Ли на настоящий момент нет полного описания централизаторов, как и в случае частично коммутативных метабелевых групп. Приведем описание централизаторов порождающих, а также свойство так называемых централизаторов в коммутанте $\mathcal{C}(f)$(определяемых как $\mathcal{C}(f) = C(f) \cap \mathcal{M}'(A;G)$) для линейных комбинаций порождающих. Эти результаты являются аналогами теорем 1.2 и 1.3.

Теорема 2.7. [23] *Пусть* R *— область целостности и* G *— неориентированный граф без петель с множеством вершин* A. *Тогда централизаторы порождающих частично коммутативной метабелевой* R*-алгебры* $\mathcal{M}_R(A;G)$ *имеют следующий вид.*
1. Если a_1 *— изолированная вершина в графе* G, *то* $C(a_1)$ *состоит из всех элементов* g *представимых в виде*

$$g = \alpha_1 a_1, \tag{2}$$

где $\alpha_1 \in R$.
2. Если вершина a_1 *висячая (для определенности смежна только с вершиной* a_2*) в графе* G, *то* $C(a_1)$ *состоит из всех элементов* g *представимых в виде*

$$g = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \tag{3}$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in R$.
3. Если вершина a_1 *смежна с вершинами* $a_2, \ldots, a_r$, *в графе* G ($r \geqslant 3$), *то* $C(a_1)$ *состоит из всех элементов* g, *представимых в виде*

$$g = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k a_{l_k} + \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant r} [a_i, a_j].g_{ij}, \tag{4}$$

где $\alpha_k \in R$, $g_{ij} \in R[A \backslash \{a_1\}]$.

Здесь для $f \in \mathcal{M}'_R(A; G)$ и $g \in R[A]$ под $f.g$ подразумевается присоединенное действие g на f.

Теорема 2.8. [23] *Пусть* R *— область целостности,* G *— неориентированный граф без петель с множеством вершин* A. *Тогда в частично коммутативной метабелевой* R*-алгебре Ли* $\mathcal{M}_R(A; G)$ *выполнено*

$$\mathcal{C}\left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_{i_j} a_{i_j}\right) = \bigcap_{j=1}^{l} \mathcal{C}(a_{i_j})$$

для любых элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_l}$ *и для любых* $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_l} \in R \backslash \{0\}$.

Аналогично случаю групп элементарной теорией алгебры Ли называется множество предложений сигнатуры алгебры Ли, истинных на этой алгебре. При этом алгебры Ли можно рассматривать как с точки зрения классической сигнатуры, включающей в себя сложение и умножение элементов, так и двуосновные алгебраические системы; в этом случае в сигнатуру добавляется операция умножения элемента алгебры Ли на скаляр (элемент области целостности R, над которой рассматривается алгебра Ли). Универсальной теорией алгебры Ли называется множество предложений вида $\forall x_1, \forall x_2 \ldots, \forall x_m \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — бескванторная формула сигнатуры алгебр Ли.

Вопрос элементарной эквивалентности частично коммутативных (метабелевых) алгебр Ли был рассмотрен для случая алгебр Ли над полем, рассматриваемых как двуосновные системы и для случая колец Ли в классической сигнатуре.

Теорема 2.9. [25] *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* G *и* H *— конечные неориентированные графы без петель, с множествами вершин* A *и* B *соответственно.*

(1). *Частично коммутатвыне алгебры Ли* $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}(A; G)$ *и* $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}(B; H)$, *рассматриваемые как двуосновные алгебраические системы, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда* $G \simeq H$.

(2). *Частично коммутативные метабелевы алгебры Ли $\mathcal{M}_{\mathbb{F}}(A;G)$ и $\mathcal{M}_{\mathbb{F}}(B;H)$, рассматриваемые как двуосновные алгебраические системы, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G \simeq H$.*

Теорема 2.10. [25] *Пусть G и H —- произвольные конечные неориентированные графы без петель, с множествами вершин A и B соответственно.*

(1). *Частично коммутативные кольца Ли $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(A;G)$ и $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(B;H)$, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G \simeq H$.*

(2). *Частично коммутативные метабелевы кольца Ли $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(A;G)$ и $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(B;H)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G \simeq H$.*

Как и для случая групп, для некоторых классов частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли были тоже получены критерии универсальной эквивалентности.

Теорема 2.11. [26, 27] *Пусть R — область целостности, а C_n и C_m — циклические графы на n и m вершинах соответственно ($n, m \geqslant 3$).*
1) *Частично коммутативные R-алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A;C_n)$ и $\mathcal{L}_R(B;C_m)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$.*
2) *Частично коммутативные метабелевы R-алгебры Ли $\mathcal{M}_R(A;C_n)$ и $\mathcal{M}_R(B;C_m)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$.*

Критерий универсальной эквивалентности для деревьев не требует конечности графов. Назовем дерево G (в общем случае бесконечное) деревом *конечного* (*бесконечного*) *типа* если граф G^* (см. определение графа Γ^* в разделе 1) содержит конечное (соответственно, бесконечное) количество вершин). Графы G и H называются *взаимно локально вложимыми*, если любой конечный подграф каждого из графов G и H изоморфно вкладывается в другой граф.

Теорема 2.12. [28] *Пусть R —область целостности, G — дерево бесконечного типа с множеством вершин A, а H — дерево конечного типа с множеством вершин B.*
1) *Частично коммутативные R-алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A;G)$ и $\mathcal{L}_R(B;H)$ не являются универсально эквивалентными.*
2) *Частично коммутативные метабелевы R-алгебры Ли $\mathcal{M}_R(A;G)$ и $\mathcal{M}_R(B;H)$ не являются универсально эквивалентными.*

Теорема 2.13. [23, 27, 28] *Пусть R — область целостности, G и H — деревья конечного типа с множествами вершин A и B соответственно, причем $|A| \geqslant 2$, $|B| \geqslant 2$.*
1) *Частично коммутативные R-алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A; G)$ и $\mathcal{L}_R(B; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $G^* \simeq H^*$.*
2) *Частично коммутативные метабелевы R-алгебры Ли $\mathcal{M}_R(A; G)$ и $\mathcal{M}_R(B; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $G^* \simeq H^*$.*

Теорема 2.14. [28] *Пусть R — область целостности, G и H — деревья бесконечного типа с множествами вершин A и B соответственно.*
1) *Частично коммутативные R-алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A; G)$ и $\mathcal{L}_R(B; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда деревья G^* и H^* взаимно локально вложимы.*
2) *Частично коммутативные метабелевы R-алгебры Ли $\mathcal{M}_R(A; G)$ и $\mathcal{M}_R(B; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда деревья G^* и H^* взаимно локально вложимы.*

В [29] было заявлено следующее обобщение перечисленных выше результатов об универсальной эквивалентности для частично коммутативных алгебр Ли.

Теорема 2.15. *Пусть $G = \langle A; E\rangle$ и $H = \langle B; F\rangle$ — конечные графы без треугольников и квадратов и без изолированных вершин. Частично коммутативные алгебры Ли $\mathcal{L}(A; G)$ и $\mathcal{L}(B; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда графы G^* и H^* изоморфны, а количество двухвершинных компонент связности в графах G и H одинаково.*

Список литературы

[1] E. I. Timoshenko, Endomorphisms and universal theories of solvable groups, Novosibirsk, NSTU, 2013 (NSTU Monographs).

[2] Ch. K. Gupta, E. I. Timoshenko, Partially commutative metabelian groups: centralizers and elementary equivelence, Algebra and Logic, **48**, 3 (2009), 173–192.

[3] E. I. Timoshenko, Universal equivalence of partially commutative metabelian groups, Algebra and Logic, **49**, 2 (2010), 177–196.

[4] E. I. Timoshenko, Cenralizers dimensions and universal theories for partially commutative metabelian groups, Algebra and Logic, **56**, 2 (2017), 149–170.

[5] E. I. Timoshenko, Cenralizers dimensions of partially commutative metabelian groups, Algebra and Logic, **57**, 1 (2018), 69–80.

[6] V. Ya. Bloshchitsyn, E. I. Timoshenko, Comparison between universal theories of partially commutative metabelian groups, Sib. M. J., **58**, 3 (2017), 382–391.

[7] Ch. K. Gupta, E. I. Timoshenko, Universal theories for partially commutative metabelian groups, Algebra and Logic, **50**, 1 (2011), 1–16.

[8] E. I. Timoshenko, A Mal'tsev basis for a partially commutative nilpotent metabelian group, Algebra and Logic, **50**, 5 (2011), 439–446.

[9] Ch. K. Gupta, E. I. Timoshenko, Property and universal theories for partially commutative nilpotent metabelian groups, Algebra and Logic, **51**, 4 (2012), 285–305.

[10] E. I. Timoshenko, Quasivarieties generated by partially commutative groups, Sib. M. J., **54**, 4 (2013), 722–730.

[11] E. I. Timoshenko, On embedding of partially commutative metabelian groups to matrix groups, Int. J. of Group Theory, **7**, 4 (2018), 17–26.

[12] G. A. Noskov, The image of automorphism group of a graph group under abelinization map, Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: математика, механика, информатика, **12**, 2 (2012), 83–102.

[13] P. V. Ushakov, IA-automorphisms of metabelian product of two abelian groups, Mat. zametki, **70**, 3 (2001), 446–457. (Russian)

[14] E. I. Timoshenko, On one representation of automorphism group of partially commutative metabelian group, Mat zametki, **97**, 2 (2015), 286–295. (Russian)

[15] V. N. Remeslennikov, A. V. Treyer, Structure of the automorphism group for partially commutative class two nilpotent groups, Algebra and Logic,**49**, 1 (2010), 43–67.

[16] M. R. Laurence, A generating set for the automorphisms group of a graph group, J. London Math. Soc., (2), **52** (1995), 318–334.

[17] K. H. Kim, L. Makar-Limanov, J. Neggers, F. W. Roush, Graph algebras, J. Algebra, **64** (1980), 46–51.

[18] G. Duchamp, D. Krob, Free Partially Commutative Structures, J. Algebra, **156** (1993), 318–361.

[19] G. Duchamp, D. Krob, The Free Partially Commutative Lie Algebra: Bases and Ranks, Advances in Mathematics, **92** (1992), 95–126.

[20] E. N. Poroshenko, Bases for partially commutative Lie algebras, Algebra and Logic, **50**, 5 (2011), 405–417.

[21] L. A. Bokut, Base of free polynilpotent Lie algebras, Algebra i logika, Seminar, **2**, 4 (1963), 13–20. (Russian)

[22] A. L. Shmelkin, Free polynilpotent groups, Izv. AN SSSR, **28** (1964), 91–122. (Russian)

[23] E. N. Poroshenko, E. I. Timoshenko, Universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras, J. Algebra, **384** (2013), 143–168.

[24] E. N. Poroshenko, Centralizers in partially commutative Lie algebras, Algebra and Logic, **51**, 4 (2012), 351–371.

[25] E. N. Poroshenko, Elementary equivalence of partially commutative Lie rings and algebras, Algebra and Logic, **56**, 4 (2017), 348–352.

[26] E. N. Poroshenko, On universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras, Comm. in Algebra, **43**, 2 (2015), 746–762.

[27] E. N. Poroshenko, Universal equivalence of partially commutative Lie algebras, Algebra and Logic, **56**, 2 (2017), 133–148.

[28] E. N. Poroshenko, Universal equivalence of some countably generated partially commutative structures, Siberian Math. J., **58**, 2 (2017), 296–304.

[29] E. N. Poroshenko, Universal equivalence of partially commutative Lie algebras defined by graphs with no triangles, squares, and isolated vertices, International Conference “Mal’tsev meeting”, collection of abstracts, Novosibirsk, 2019, 172. (Russian)

COMBINATIONS OF STRUCTURES AND OF THEIR THEORIES (AN INFORMATIVE SURVEY)

S. V. Sudoplatov*

Novosibirsk State Technical University,
20 K. Marx ave., Novosibirsk, 630073,
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4 Acad. Koptyug ave, Novosibirsk, 630090,
Novosibirsk State University,
1 Pirogov st., Novosibirsk, 630090

Model theory was formed in 1930s–1950s as a branch of mathematical logic dealing with the connection between a formal language producing an information written by collections of formulas and its interpretations, or models, or structures, i.e., it represents links between syntactic and semantic objects. These objects can be used to classify each other producing structural classifications of theories and their models. Solving classification questions valuable characteristics arise (dimensions, ranks, complexities, spectra etc.) for various classes of structures and their theories. The universality of the subject of Model Theory allows to obtain structural results in related areas.

Having a family of structures (semantic objects) or of theories (syntactic objects) one can observe both their influence to each other via their combinations and possibilities for generations of new structures/theories with respect to natural operators. These operators admit approximations of information considered on semantic/syntactic levels. In such case we can form structures/theories with required properties by given approximations.

The procedure of constructing new structures/theories can have variations up to isomorphism or elementary equivalence. The number of these variations define spectra/e-spectra for structures/theories that can have ranges broad enough, in the admissible diapason. Thus, on one hand, these operators can generate new structures/theories, on the other hand, model-theoretic properties and spectra/e-spectra for these new structures/theories have bounds depending on given families.

*This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132546), the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002, and Russian Foundation for Basic Researches (Project No. 17-01-00531-a).

Operators under consideration also define related topologies with some (non)standard topological properties including closures, Hausdorffness, possibilities for neighbourhoods, generations of families by given subfamilies, separability of elements, discreteness/density, ranks, etc.

Thus, we have a series of natural questions for families of structures/theories and their combinations including the question for descriptions of model-theoretic properties and (e-)spectra, the question of representability of structures/theories in closures of given families, the question of characterization for the existence of least/minimal generating sets, the question of existence and families without least/minimal generating sets, the question of decomposition of least generating set into a family of (disjoint) subsets for (disjoint) subfamilies of given family, the question of description of specificity for natural classes of structures/theories including classes of finite structures, countably categorical structures, abelian groups etc.

The aim of the paper is to collect natural structural and topological results, related to the questions above, for operators (similar to [1, 2, 3, 4, 5]) on classes of structures and their theories producing families of structures/theories approximating given structure/theory or producing limit structures/theories by given ones.

In Section 1, we define P-operators, E-operators, and corresponding combinations of structures. In Section, 2 we characterize the preservation of ω-categoricity for P-combinations and E-combinations as well as Ehrenfeuchtness for P-combinations. In Section 3 we pose and investigate questions on variations of structures under P-operators and E-operators. The notions of e-spectra for P-operators and E-operators are introduced in Section 4, values for e-spectra are described, and the preservation of Ehrenfeuchtness for E-combinations is characterized.

Topological aspects related to model theoretic problems are investigated in the series of papers [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. In Sections 5 and 6, we study structural properties of E-combinations and P-combinations of structures and their theories from the topological viewpoint. Using the E-operators and the P-operators we introduce topologies (related to topologies in [6]) and investigate their properties. In Section 6, we show for E-combinations that the existence of a minimal generating set of theories is equivalent to the existence of the least generating set, and characterizes syntactically and semantically the property of the existence of the least generating set.

In Section 7, we introduce the notion of language uniform theory. For the class of linearly ordered language uniform theories we solve the problem of the existence of a least generating set with respect to E-combinations and characterize that existence in terms of orders. Values for e-spectra of families of language uniform theories are obtained in Section 8. In Section 9, it is shown that families of language uniform theories produce an arbitrary given

Cantor—Bendixson rank and given degree.

In Section 10, relative e-spectra are defined and their properties and values are described. In Section 11, we study families of theories with and without least generating sets. It is shown that the property of (non-)existence of least generating set is not preserved under extensions of families of theories. In Section 12, we present a topological characterization of the existence of relative least generating set and connect this property with values of e-spectra. In Section 13, semilattices and lattices for families of theories are studied.

In Section 14, we study closed classes of theories with finite models and of ω-categorical theories. Properties related to approximations of theories with finite and infinite models are described in Section 15. In Section 16, we describe e-spectra for theories with finite models and of ω-categorical theories. Relations of (almost) language uniform theories and theories with finite models are studied in Section 17. In Section 18, we describe families of finite cardinalities for models of theories in E-closures and P-closures.

In Section 19, we characterize the property when a theory of abelian groups belongs to E-closure of a given family of theories for abelian groups. This characterization allows to describe closed sets of theories of abelian groups with(out) least generating sets.

Some further directions are outlined in Section 20.

Related questions and problems are formulated in Section 21.

1 P-operators, E-operators, combinations

Throughout the paper we consider structures of relational languages, where (partial) operations are represented by their graphs.

Let $P = (P_i)_{i\in I}$ be a family of nonempty unary predicates, $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ be a family of structures such that P_i is the universe of $\mathcal{A}_i$ for $i \in I$, and the symbols P_i be disjoint with languages for the structures $\mathcal{A}_j$ for $j \in I$. The structure $\mathcal{A}_P \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ expanded by the predicates P_i is the *P-union* of the structures $\mathcal{A}_i$, and the operator mapping $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ to $\mathcal{A}_P$ is the *P-operator*. The structure $\mathcal{A}_P$ is called the *P-combination* of the structures $\mathcal{A}_i$ and denoted by $\mathrm{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ if $\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_P \upharpoonright A_i) \upharpoonright \Sigma(\mathcal{A}_i)$ for $i \in I$. Structures $\mathcal{A}'$ which are elementary equivalent to $\mathrm{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$, will be also considered as P-combinations.

By the definition, without loss of generality we can assume for $\mathrm{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ that all languages $\Sigma(\mathcal{A}_i)$ coincide interpreting new predicate symbols for $\mathcal{A}_i$ by empty relation.

Clearly, all structures $\mathcal{A}' \equiv \mathrm{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ are represented as unions of their restrictions $\mathcal{A}'_i = (\mathcal{A}' \upharpoonright P_i) \upharpoonright \Sigma(\mathcal{A}_i)$ if and only if the set $p_\infty(x) = \{\neg P_i(x) \mid i \in I\}$ is inconsistent. If $\mathcal{A}' \neq \mathrm{Comb}_P(\mathcal{A}'_i)_{i\in I}$, we write $\mathcal{A}' = \mathrm{Comb}_P(\mathcal{A}'_i)_{i\in I\cup\{\infty\}}$, where $\mathcal{A}'_\infty = \mathcal{A}' \restriction \bigcap\limits_{i\in I} \overline{P_i}$, probably applying Morleyzation. Moreover, we write $\mathrm{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i\in I\cup\{\infty\}}$ for $\mathrm{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ with the empty structure $\mathcal{A}_\infty$.

Notice that each structure $\mathcal{A}$ in a predicate language Σ can be represented as a P-combination. Indeed, taking formulas $\varphi_i(x)$, whose sets of solutions cover A, we can take φ_i-restrictions $\mathcal{A}_i$ of $\mathcal{A}$ with $P_i(x) \equiv \varphi_i(x)$. The P-combination of $\mathcal{A}_i$ restricted to Σ forms $\mathcal{A}$.

Clearly, if all predicates P_i are disjoint, a structure $\mathcal{A}_P$ is a P-combination and a disjoint union of structures $\mathcal{A}_i$ [1]. In this case, the P-combination $\mathcal{A}_P$ is called *disjoint*. Clearly, $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P) = \mathrm{Th}(\mathcal{A}'_P)$ for any disjoint P-combination $\mathcal{A}_P$, where $\mathcal{A}'_P$ is obtained from $\mathcal{A}_P$ replacing $\mathcal{A}_i$ by pairwise disjoint $\mathcal{A}'_i \equiv \mathcal{A}_i$ for $i \in I$. Thus, in this case, similarly to structures the P-operator works for the theories $T_i = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$ producing the theory $T_P = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$, which is denoted by $\mathrm{Comb}_P(T_i)_{i\in I}$.

On the other hand, if all P_i coincide then $P_i(x) \equiv (x \approx x)$ and removing the symbols P_i we obtain a restriction of $\mathcal{A}_P$ which is the combination of the structures $\mathcal{A}_i$ [3, 4].

For an equivalence relation E replacing disjoint predicates P_i by E-classes we obtain the structure $\mathcal{A}_E$ being the *E-union* of structures $\mathcal{A}_i$. In this case, the operator mapping $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ to $\mathcal{A}_E$ is the *E-operator/*. The structure $\mathcal{A}_E$ is also called the *E-combination* of the structures $\mathcal{A}_i$ and denoted by $\mathrm{Comb}_E(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$; here $\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_E \restriction A_i) \restriction \Sigma(\mathcal{A}_i)$ for $i \in I$. As above, structures $\mathcal{A}'$, which are elementary equivalent to $\mathcal{A}_E$, are denoted by $\mathrm{Comb}_E(\mathcal{A}'_j)_{j\in J}$, where $\mathcal{A}'_j$ are restrictions of $\mathcal{A}'$ to its E-classes.

If $\mathcal{A}_E \prec \mathcal{A}'$, the restriction $\mathcal{A}' \restriction (A' \setminus A_E)$ is denoted by $\mathcal{A}'_\infty$. Clearly, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'_E \coprod \mathcal{A}'_\infty$, where $\mathcal{A}'_E = \mathrm{Comb}_E(\mathcal{A}'_i)_{i\in I}$, $\mathcal{A}'_i$ is a restriction of $\mathcal{A}'$ to its E-class containing the universe A_i for $i \in I$.

Considering an E-combination $\mathcal{A}_E$ we will identify E-classes A_i with structures $\mathcal{A}_i$.

Clearly, the nonempty structure $\mathcal{A}'_\infty$ exists if and only if I is infinite.

Notice that any E-operator can be interpreted as the P-operator replacing or naming E-classes for $\mathcal{A}_i$ by unary predicates P_i. For infinite I, the difference between 'replacing' and 'naming' implies that $\mathcal{A}_\infty$ can have unique or unboundedly many E-classes returning to the E-operator.

Thus, $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E) = \mathrm{Th}(\mathcal{A}'_E)$, for any E-combination $\mathcal{A}_E$, here $\mathcal{A}'_E$ is obtained from $\mathcal{A}_E$ replacing $\mathcal{A}_i$ by pairwise disjoint $\mathcal{A}'_i \equiv \mathcal{A}_i$ for $i \in I$. In this case, similarly to structures the E-operator works for the theories $T_i = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$ producing the theory $T_E = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ which is denoted by $\mathrm{Comb}_E(T_i)_{i\in I}$, by $\mathcal{T}_E$, or by $\mathrm{Comb}_E\mathcal{T}$, where $\mathcal{T} = \{T_i \mid i \in I\}$.

Note that P-combinations and E-unions can be interpreted by randomizations [5] of structures.

Sometimes we admit that $\mathrm{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ and $\mathrm{Comb}_E(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ are expanded by new relations or old relations are extended by new tuples.

In these cases the combinations will be denoted by $\mathrm{EComb}_P(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ and $\mathrm{EComb}_E(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ respectively.

2 ω-categoricity and Ehrenfeuchtness for combinations

Теорема 2.1. [13]. *If predicates P_i are pairwise disjoint, the languages $\Sigma(\mathcal{A}_i)$ are at most countable, $i \in I$, $|I| \leq \omega$, and the structure $\mathcal{A}_P$ is infinite, then the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$ is ω-categorical if and only if I is finite and each structure $\mathcal{A}_i$ is either finite or ω-categorical.*

Notice that Theorem 2.1 is does not hold if the P-combination is not disjoint: taking, for instance, a graph $\mathcal{A}_1$ with a set P_1 of vertices and with infinitely many R_1-edges such that all vertices have degree 1, as well as taking a graph $\mathcal{A}_2$ with the same set P_1 of vertices and with infinitely many R_2-edges such that all vertices have degree 1, we can choose edges such that $R_1 \cap R_2 = \varnothing$, each vertex in P_1 has $(R_1 \cup R_2)$-degree 2, and alternating R_1- and R_2-edges there is an infinite sequence of $(R_1 \cup R_2)$-edges. Thus, $\mathcal{A}_1$ and $\mathcal{A}_2$ are ω-categorical whereas $\mathrm{Comb}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ is not.

Note also that Theorem 2.1 does not hold replacing $\mathcal{A}_P$ by $\mathcal{A}_E$. Indeed, taking infinitely many infinite E-classes with structures of the empty languages we obtain an ω-categorical structure of the equivalence relation E. At the same time, Theorem 2.1 is preserved if there are finitely many E-classes. In general case, $\mathcal{A}_E$ does not preserve the ω-categoricity if and only if E_i-classes *approximate* infinitely many n-types for some $n \in \omega$, i.e., there are infinitely many n-types $q_m(\bar{x})$, where $m \in \omega$, such that for any $m \in \omega$, we have $\varphi_j(\bar{x}) \in q_j(\bar{x})$ for $j \leq m$ and classes $E_{k_1}, \ldots, E_{k_m}$, all formulas $\varphi_j(\bar{x})$, have realizations in $A_E \setminus \bigcup\limits_{r=1}^{m} E_{k_r}$. Indeed, assuming that all $\mathcal{A}_i$ are ω-categorical we can lose the ω-categoricity for $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ only having infinitely many n-types (for some n) inside $\mathcal{A}_\infty$. Since all n-types in $\mathcal{A}_\infty$ are locally (for any formulas in these types) realized in infinitely many $\mathcal{A}_i$, E_i-classes approximate infinitely many n-types and $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ is not ω-categorical. Thus, we have the following

Теорема 2.2. [13]. *If the languages $\Sigma(\mathcal{A}_i)$ are at most countable, $i \in I$, $|I| \leq \omega$, and the structure $\mathcal{A}_E$ is infinite, then the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ is ω-categorical if and only if each structure $\mathcal{A}_i$ is either finite or ω-categorical, and I is either finite, or infinite and E_i-classes do not approximate infinitely many n-types for any $n \in \omega$.*

As usual, we denote by $I(T, \lambda)$ the number of pairwise non-isomorphic models of T having the cardinality λ.

Recall that a theory T is *Ehrenfeucht* if T has finitely many countable models ($I(T,\omega) < \omega$) but is not ω-categorical ($I(T,\omega) > 1$). A structure with an Ehrenfeucht theory is also *Ehrenfeucht*.

Теорема 2.3. [13]. *If predicates P_i are pairwise disjoint, the languages $\Sigma(\mathcal{A}_i)$ are at most countable, $i \in I$, and the structure $\mathcal{A}_P$ is infinite then the theory* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$ *is Ehrenfeucht if and only if the following conditions hold:*

(a) *I is finite;*

(b) *each structure $\mathcal{A}_i$ is either finite, or ω-categorical, or Ehrenfeucht;*

(c) *some $\mathcal{A}_i$ is Ehrenfeucht.*

A characterization for Ehrenfeuchtness of E-combinations uses more tools and will be formulated in Section 4.

3 Variations of structures related to combinations and E-representability

Clearly, for a disjoint P-combination $1\mathcal{A}_P$ with infinite I, there is a structure $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_P$ with a structure $\mathcal{A}'_\infty$. Since the type $p_\infty(x)$ is nonisolated (omitted in $\mathcal{A}_P$), the cardinalities for $\mathcal{A}'_\infty$ are unbounded. Infinite structures $\mathcal{A}'_\infty$ are not necessary elementary equivalent and can be both elementary equivalent to some $\mathcal{A}_i$ or not. For instance, if infinitely many structures $\mathcal{A}_i$ contain unary predicates Q_0, say singletons, without unary predicates Q_1 and infinitely many $\mathcal{A}_{i'}$ for $i' \neq i$ contain Q_1, say again singletons, without Q_0 then $\mathcal{A}'_\infty$ can contain Q_0 without Q_1, Q_1 without Q_0, or both Q_0 and Q_1. For the latter case, $\mathcal{A}'_\infty$ is not elementary equivalent either $\mathcal{A}_i$, or $\mathcal{A}_{i'}$.

A natural question arises:

Question 1. *What can be the number of pairwise elementary non-equivalent structures $\mathcal{A}'_\infty$?*

Consider an E-combination $\mathcal{A}_E$ with infinite I and all structures $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$. There are two possibilities: each non-empty *E-restriction* of $\mathcal{A}'_\infty$, i.e. a restriction to some E-class, is elementary equivalent to some $\mathcal{A}_i$ for $i \in I$, or some E-restriction of $\mathcal{A}'_\infty$ is elementary equivalent to none of the structures $\mathcal{A}_i$, where $i \in I$.

Similarly Question 1 we have:

Question 2. *What can be the number of pairwise elementary non-equivalent E-restrictions of structures $\mathcal{A}'_\infty$?*

For $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$, we denote by $I_\infty(T,\lambda)$ the number of pairwise non-isomorphic structures $\mathcal{A}'_\infty$ having the cardinality λ.

Clearly, $I_\infty(T,\lambda) \leq I(T,\lambda)$.

If structures $\mathcal{A}'_\infty$ exist and do not have links with $\mathcal{A}'_P$ (for instance, for a disjoint P-combination), then $I_\infty(T,\lambda)+1 \leq I(T,\lambda)$, since if models of T are isomorphic, then their restrictions to $p_\infty(x)$ are isomorphic too and $p_\infty(x)$ can be omitted producing $\mathcal{A}'_\infty = \varnothing$. Here, $I_\infty(T,\lambda)+1 = I(T,\lambda)$ if and only if all $I(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i),\lambda) = 1$ and, moreover, for any $\left(\bigcup\limits_{i\in I} P_i\right)$-restrictions $\mathcal{B}_P, \mathcal{B}'_P$ of $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \models T$ respectively, where $|B| = |B'| = \lambda$, and their P_i-restrictions $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{B}'_i$, there are isomorphisms $f_i \colon \mathcal{B}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}'_i$ preserving P_i and with an isomorphism $\bigcup\limits_{i\in I} f_i \colon \mathcal{B}_P \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}'_P$.

Clearly, $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_P$ realizing $p_\infty(x)$ is not elementary embeddable into $\mathcal{A}_P$ and cannot be represented as a disjoint P-combination of $\mathcal{A}'_i \equiv \mathcal{A}_i$ for $i \in I$. At the same time, there are E-combinations such that all $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$ can be represented as E-combinations of some $\mathcal{A}'_j \equiv \mathcal{A}_i$. We call this representability of $\mathcal{A}'$ to be the *E-representability.* If, for instance, all $\mathcal{A}_i$ are infinite structures of the empty language then any $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$ is an E-combination of some infinite structures $\mathcal{A}'_j$ of the empty language too.

Thus we have:

Question 3. *What is a characterization of E-representability for all $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$?*

Definition. (cf. [14]). For a first-order formula $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, an equivalence relation E and a formula $\sigma(x)$ we define a (E,σ)-*relativized* formula $\varphi^{E,\sigma}$ by induction:

(i) if φ is an atomic formula then $\varphi^{E,\sigma} = \varphi(x_1,\ldots,x_n) \wedge \bigwedge\limits_{i,j=1}^{n} E(x_i,x_j) \wedge \exists y(E(x_1,y) \wedge \sigma(y))$;

(ii) if $\varphi = \psi\tau\chi$, where $\tau \in \{\wedge,\vee,\to\}$, and $\psi^{E,\sigma}$ and $\chi^{E,\sigma}$ are defined then $\varphi^{E,\sigma} = \psi^{E,\sigma}\tau\chi^{E,\sigma}$;

(iii) if $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \neg\psi(x_1,\ldots,x_n)$ and $\psi^{E,\sigma}(x_1,\ldots,x_n)$ is defined then $\varphi^{E,\sigma}(x_1,\ldots,x_n) = \neg\psi^{E,\sigma}(x_1,\ldots,x_n) \wedge \bigwedge\limits_{i,j=1}^{n} (E(x_i,x_j) \wedge \exists y(E(x_1,y) \wedge \sigma(y))$;

(iv) if $\varphi(x_1,\dots,x_n)=\exists x\psi(x,x_1,\dots,x_n)$ and $\psi^{E,\sigma}(x,x_1,\dots,x_n)$ is defined then

$$\varphi^{E,\sigma}(x_1,\dots,x_n)=\exists x\left(\bigwedge_{i=1}^{n}E(x,x_i)\wedge\exists y(E(x,y)\wedge\sigma(y))\wedge\psi^{E,\sigma}(x,x_1,\dots,x_n)\right);$$

(v) if $\varphi(x_1,\dots,x_n)=\forall x\psi(x,x_1,\dots,x_n)$ and $\psi^{E,\sigma}(x,x_1,\dots,x_n)$ is defined then

$$\varphi^{E,\sigma}(x_1,\dots,x_n)=\forall x\left(\bigwedge_{i=1}^{n}E(x,x_i)\wedge\exists y(E(x,y)\wedge\sigma(y))\to\psi^{E,\sigma}(x,x_1,\dots,x_n)\right).$$

We write E instead of (E,σ) if $\sigma=(x\approx x)$.

Note that two E-classes E_i and E_j with structures $\mathcal{A}_i$ and $\mathcal{A}_j$ (of a language Σ) respectively are not elementary equivalent if and only if there is a Σ-sentence φ such that $\mathcal{A}_E\upharpoonright E_i\models\varphi^E$ (with $\mathcal{A}_i\models\varphi$) and $\mathcal{A}_E\upharpoonright E_j\models(\neg\varphi)^E$ (with $\mathcal{A}_j\models\neg\varphi$). In this case, the formula φ is called (i,j)-*separating*.

The following properties are obvious:

(1) If φ is (i,j)-separating then $\neg\varphi$ is (j,i)-separating.

(2) If φ is (i,j)-separating and ψ is (i,k)-separating then $\varphi\wedge\psi$ is both (i,j)-separating and (i,k)-separating.

(3) There is a set Φ_i of (i,j)-separating sentences, for j in some $J\subseteq I\setminus\{i\}$, which separates $\mathcal{A}_i$ from all structures $\mathcal{A}_j\not\equiv\mathcal{A}_i$.

The set Φ_i is called *e-separating* (for $\mathcal{A}_i$) and $\mathcal{A}_i$ is called *e-separable* (witnessed by Φ_i).

Assuming that some $\mathcal{A}'\equiv\mathcal{A}_E$ is not E-representable, we obtain an E'-class with a structure $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}'$ which is e-separable from all $\mathcal{A}_i$ for $i\in I$ by a set Φ. It means that for some sentences φ_i with $\mathcal{A}_E\upharpoonright E_i\models\varphi_i^E$, i.e. $\mathcal{A}_i\models\varphi_i$, the sentences $\left(\bigwedge\limits_{i\in I_0}\neg\varphi_i\right)^E$, where $I_0\subseteq_{\rm fin}I$, form a consistent set satisfying the restriction of $\mathcal{A}'$ to the class E'_B with the universe B of $\mathcal{B}$.

Thus, answering Question 3 we have

Proposition 3.1. [13]. *For any E-combination $\mathcal{A}_E$ the following conditions are equivalent:*

(1) *there is $\mathcal{A}'\equiv\mathcal{A}_E$ which is not E-representable;*

(2) *there are sentences φ_i such that $\mathcal{A}_i\models\varphi_i$ for $i\in I$ and the set of sentences $\left(\bigwedge\limits_{i\in I_0}\neg\varphi_i\right)^E$, where $I_0\subseteq_{\rm fin}I$, is consistent with $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$.*

Proposition 3.1 implies

Corollary 3.2. [13]. *If $\mathcal{A}_E$ has only finitely many pairwise elementary non-equivalent E-classes then each $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$ is E-representable.*

4 e-spectra

If there is $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$ which is not E-representable, we have E'-representability replacing E by E' such that E' is obtained from E by adding equivalence classes with models for all theories T, where T is a theory of a restriction $\mathcal{B}$ of a structure $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$ to some E-class and $\mathcal{B}$ is not elementary equivalent to the structures $\mathcal{A}_i$. The resulting structure $\mathcal{A}_{E'}$ (with the E'-representability) is an *e-completion* or an *e-saturation* of $\mathcal{A}_E$. The structure $\mathcal{A}_{E'}$ itself is called *e-complete*, or *e-saturated*, or *e-universal*, or *e-largest*.

For a structure $\mathcal{A}_E$ the number of *new* structures with respect to the structures $\mathcal{A}_i$, i.e., of the structures $\mathcal{B}$ which are pairwise elementary non-equivalent and elementary non-equivalent to the structures $\mathcal{A}_i$, is called the *e-spectrum* of $\mathcal{A}_E$ and denoted by e-$\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_E)$. The value

$$\sup\{e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathcal{A}')) \mid \mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E\}$$

is called the *e-spectrum* of the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ and denoted by e-$\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E))$.

If $\mathcal{A}_E$ does not have E-classes $\mathcal{A}_i$, which can be removed together with all E-classes $\mathcal{A}_j \equiv \mathcal{A}_i$, preserving the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$, then $\mathcal{A}_E$ is called *e-prime* or *e-minimal*.

For a structure $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$ we denote by $\mathrm{TH}(\mathcal{A}')$ the set of all theories $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$ of E-classes $\mathcal{A}_i$ in $\mathcal{A}'$.

By the definition, an e-minimal structure $\mathcal{A}'$ consists of E-classes with a minimal set $\mathrm{TH}(\mathcal{A}')$. If $\mathrm{TH}(\mathcal{A}')$ is the least for models of $\mathrm{Th}(\mathcal{A}')$ then $\mathcal{A}'$ is called *e-least*.

Proposition 4.1. [13]. 1. *For a given language Σ, $0 \leq e$-$\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)) \leq 2^{\max\{|\Sigma|,\omega\}}$.*
2. *A structure $\mathcal{A}_E$ is e-largest if and only if e-$\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_E) = 0$. In particular, an e-minimal structure $\mathcal{A}_E$ is e-largest if and only if e-$\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)) = 0$.*
3. *Any weakly saturated structure $\mathcal{A}_E$, i.e., a structure realizing all types of $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ is e-largest.*
4. *For any E-combination $\mathcal{A}_E$, if $\lambda \leq e$-$\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E))$ then there is a structure $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$ with e-$\mathrm{Sp}(\mathcal{A}') = \lambda$; in particular, any theory $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ has an e-largest model.*
5. *For any structure $\mathcal{A}_E$, e-$\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_E) = |\mathrm{TH}(\mathcal{A}'_{E'}) \setminus \mathrm{TH}(\mathcal{A}_E)|$, where $\mathcal{A}'_{E'}$ is an e-largest model of $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$.*

6. *Any prime structure* $\mathcal{A}_E$ *is e-minimal (but not vice versa as the e-minimality is preserved, for instance, extending an infinite* E*-class of given structure to a greater cardinality). Any small theory* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ *has an e-minimal model (being prime), and in this case, the structure* $\mathcal{A}_E$ *is e-minimal if and only if*

$$\mathrm{TH}(\mathcal{A}_E) = \bigcap_{\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E} \mathrm{TH}(\mathcal{A}'),$$

i.e., $\mathcal{A}_E$ *is e-least.*
7. *If* $\mathcal{A}_E$ *is e-least then* $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_E) = e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E))$.
8. *If* $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E))$ *is finite and* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ *has e-least model then* $\mathcal{A}_E$ *is e-minimal if and only if* $\mathcal{A}_E$ *is e-least and if and only if* $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_E) = e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E))$.
9. *If* $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E))$ *is infinite then there is* $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$ *such that* $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathcal{A}') = e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E))$ *but* $\mathcal{A}'$ *is not e-minimal.*
10. *A countable e-minimal structure* $\mathcal{A}_E$ *is prime if and only if each* E*-class* $\mathcal{A}_i$ *is a prime structure.*

Reformulating Theorem 2.2 we have

Theorem 4.2. [13]. *For* E*-combinations which are not* ECombʼ *a countable theory* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ *without finite models is* ω*-categorical if and only if* $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)) = 0$ *and each* E*-class* $\mathcal{A}_i$ *is either finite or* ω*-categorical.*

Proposition 4.3. [13]. *For any cardinality* λ *there is a theory* $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ *of a language* Σ *such that* $|\Sigma| = |\lambda + 1|$ *and* $e\text{-}\mathrm{Sp}(T) = \lambda$.

Proposition 4.4. [13]. *For any infinite cardinality* λ *there is a theory* $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ *of a language* Σ *such that* $|\Sigma| = \lambda$ *and* $e\text{-}\mathrm{Sp}(T) = 2^\lambda$.

Note that $e\text{-}\mathrm{Sp}(T) \leq I(T, \omega)$ for any countable theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$. In particular, if $I(T, \omega)$ is finite then so is $e\text{-}\mathrm{Sp}(T)$. Moreover, if T is ω-categorical then $e\text{-}\mathrm{Sp}(T) = 0$, and if T is an Ehrenfeucht theory then $e\text{-}\mathrm{Sp}(T) < I(T, \omega)$.

Theorem 4.5. [13]. *For any theory* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$ *with non-symmetric or definable semi-isolation on the complete type* $p_\infty(x)$, $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)) \neq 1$.

Since non-definable semi-isolation implies that there are infinitely many 2-types, we have

Corollary 4.6. [13]. *For any theory* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$ *with* $e\text{-}\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)) = 1$, *the structures* $\mathcal{A}'_\infty$ *are not* ω*-categorical.*

By applying modifications of the Ehrenfeucht example as well as constructions in [4], the results for e-spectra of E-combinations are modified for P-combinations:

Proposition 4.7. [13]. *For any cardinality λ there is a theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$ of a language Σ such that $|\Sigma| = \max\{\lambda, \omega\}$ and e-$\mathrm{Sp}(T) = \lambda$.*

Proposition 4.8. [13] *For any infinite cardinality λ there is a theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$ of a language Σ such that $|\Sigma| = \lambda$ and e-$\mathrm{Sp}(T) = 2^\lambda$.*

Since for E-combinations $\mathcal{A}_E$ and P-combinations $\mathcal{A}_P$ their limit structures $\mathcal{A}_\infty$ are structures on E-classes and $p_\infty(x)$ respectively, the theories $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_\infty)$ are defined by types restricted to $E(x, y)$ and $p_\infty(x)$, and for any countable theory there are either countably many types or continuum many types, Propositions 4.3, 4.4, 4.7, and 4.8 imply the following

Theorem 4.9. [13]. *If $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ (respectively, $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$) is a countable theory then e-$\mathrm{Sp}(T) \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$. All values in $\omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$ have realizations in the class of countable theories of E-combinations (of P-combinations).*

The following theorem characterizes the Ehrenfeuchtness of $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ using values of e-spectra.

Theorem 4.10. [13]. *If the language $\bigcup\limits_{i\in I} \Sigma(\mathcal{A}_i)$ is at most countable and the structure $\mathcal{A}_E$ is infinite then the theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ is Ehrenfeucht if and only if e-$\mathrm{Sp}(T) < \omega$ (which is equivalent here to e-$\mathrm{Sp}(T) = 0$) and for an e-largest model $\mathcal{A}_{E'} \models T$ consisting of E'-classes $\mathcal{A}_j$, $j \in J$, the following conditions hold:*

(a). *for any $j \in J$, $I(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_j), \omega) < \omega$;*

(b). *there are positively and finitely many $j \in J$ such that $I(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_j), \omega) > 1$;*

(c). *if $I(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_j), \omega) \leq 1$ then there are always finitely many $\mathcal{A}_{j'} \equiv \mathcal{A}_j$ or always infinitely many $\mathcal{A}_{j'} \equiv \mathcal{A}_j$ independent of $\mathcal{A}_{E'} \models T$.*

5 Closure operators

Definition. [15]. Let $\overline{\mathcal{T}}$ be the class of all complete elementary theories of relational languages. For a set $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$ we denote by $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ the set of all theories $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, where $\mathcal{A}$ is a structure of some E-class in $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$, $\mathcal{A}_E = \mathrm{Comb}_E(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$, $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i) \in \mathcal{T}$. As usual, if $\mathcal{T} = \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ then $\mathcal{T}$ is said to be *E-closed.*

By the definition,

$$\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}) = \mathrm{TH}(\mathcal{A}'_{E'}), \tag{1}$$

where $\mathcal{A}'_{E'}$ is an e-largest model of $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$, where $\mathcal{A}_E$ consists of E-classes representing models of all theories in $\mathcal{T}$.

Note that the equality (1) does not depend on the choice of e-largest model of $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$.

Proposition 5.1. [15].

(1). *If $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ are sets of theories, $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_1 \subset \overline{\mathcal{T}}$, then $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0) \subseteq \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_1)$.*

(2). *For any set $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$, $\mathcal{T} \subset \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ if and only if the structure composed by E-classes of models of theories in $\mathcal{T}$ is not e-largest.*

(3). *Every finite set $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$ is E-closed.*

(4). (Negation of finite character) *For any $T \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}$ there are no finite $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ such that $T \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0)$.*

(5). *Any intersection of E-closed sets is E-closed.*

For a set $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$ of theories in a language Σ and for a sentence φ with $\Sigma(\varphi) \subseteq \Sigma$ we denote by $\mathcal{T}_\varphi$ the set $\{T \in \mathcal{T} \mid \varphi \in T\}$. Denote by $\mathcal{T}_F$ the family of all sets $\mathcal{T}_\varphi$.

Clearly, the partially ordered set $\langle \mathcal{T}_F; \subseteq \rangle$ forms a Boolean algebra with the least element $\varnothing = \mathcal{T}_{\neg(x\approx x)}$, the greatest element $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{(x\approx x)}$, and operations $\wedge$, $\vee$, $^-$ satisfying the following equalities: $\mathcal{T}_\varphi \wedge \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_{(\varphi\wedge\psi)}$, $\mathcal{T}_\varphi \vee \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_{(\varphi\vee\psi)}$, $\overline{\mathcal{T}_\varphi} = \mathcal{T}_{\neg\varphi}$.

By the definition, $\mathcal{T}_\varphi \subseteq \mathcal{T}_\psi$ if and only if for any model $\mathcal{M}$ of a theory in $\mathcal{T}$ satisfying φ we have $\mathcal{M} \models \psi$.

Proposition 5.2. [15]. *If $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$ is an infinite set and $T \in \overline{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{T}$ then $T \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ (i.e., T is an accumulation point for $\mathcal{T}$ with respect to E-closure Cl_E) if and only if for any formula $\varphi \in T$ the set $\mathcal{T}_\varphi$ is infinite.*

Proposition 5.2 shows that the closure Cl_E corresponds to the closure with respect to the ultraproduct operator [16, 17, 18, 20].

Theorem 5.3. [15]. *For any set $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1 \subset \overline{\mathcal{T}}$, $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1) = \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0) \cup \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_1)$.*

Corollary 5.4. [15]. (Exchange property) *If $T_1 \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T} \cup \{T_2\}) \setminus \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ then $T_2 \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T} \cup \{T_1\})$.*

Definition. [19]. A *topological space* is a pair $(X,\mathcal{O})$ consisting of a set X and a family $\mathcal{O}$ of *open* subsets of X satisfying the following conditions:

(O1). $\varnothing\in\mathcal{O}$ and $X\in\mathcal{O}$;

(O2). If $U_1\in\mathcal{O}$ and $U_2\in\mathcal{O}$ then $U_1\cap U_2\in\mathcal{O}$;

(O3). If $\mathcal{O}'\subseteq\mathcal{O}$ then $\cup\mathcal{O}'\in\mathcal{O}$.

A topological space $(X,\mathcal{O})$ is a T_0*-space* if for any pair of distinct elements $x_1,x_2\in X$ there is an open set $U\in\mathcal{O}$ containing exactly one of these elements.

A topological space $(X,\mathcal{O})$ is *Hausdorff* if for any pair of distinct points $x_1,x_2\in X$ there are open sets $U_1,U_2\in\mathcal{O}$ such that $x_1\in U_1$, $x_2\in U_2$, and $U_1\cap U_2=\varnothing$.

Theorem 5.5. [15]. *For any set $\mathcal{T}\subset\overline{\mathcal{T}}$ the pair $(\mathcal{T},\mathcal{O}_E(\mathcal{T}))$ is a Hausdorff topological space.*

Similarly to the operator $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ we define the operator $\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T})$ for families P of predicates P_i as follows.

Definition. [15]. For a set $\mathcal{T}\subset\overline{\mathcal{T}}$ we denote by $\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T})$ the set of all theories $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ such that $\mathrm{Th}(\mathcal{A})\in\mathcal{T}$ or $\mathcal{A}$ is a structure of type $p_\infty(x)$ in $\mathcal{A}'\equiv\mathcal{A}_P$, where $\mathcal{A}_P=\mathrm{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ and $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)\in\mathcal{T}$ are pairwise distinct. As above, if $\mathcal{T}=\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T})$ then $\mathcal{T}$ is said to be P*-closed*.

Using above only disjoint P-combinations $\mathcal{A}_P$ we obtain the closure $\mathrm{Cl}^d_P(\mathcal{T})$ being a subset of $\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T})$.

Proposition 5.6. [15]. (1) *If $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ are sets of theories, $\mathcal{T}_0\subseteq\mathcal{T}_1\subset\overline{\mathcal{T}}$, then $\mathcal{T}_0\subseteq\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T}_0)\subseteq\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T}_1)$.*
(2) *Every finite set $\mathcal{T}\subset\overline{\mathcal{T}}$ is P-closed.*
(3) (Negation of finite character) *For any $T\in\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T})\setminus\mathcal{T}$ there is no finite $\mathcal{T}_0\subset\mathcal{T}$ such that $T\in\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T}_0)$.*
(4) *Any intersection of P-closed sets is P-closed.*

Remark 5.7. [15]. Note that an analogue of Proposition 5.2 for P-combinations fails. Indeed, taking disjoint predicates P_i, where $i\in\omega$, with $2i+1$ elements and with structures $\mathcal{A}_i$ of the empty language, we obtain that for the set $\mathcal{T}$ of theories $T_i=\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$ $/\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T})$ consists of the theories whose models have cardinalities witnessing all ordinals in $\omega+1$. Thus, for instance, theories in $\mathcal{T}$ do not contain the formula

$$\exists x,y(\neg(x\approx y)\wedge\forall z((z\approx x)\vee(z\approx y))) \tag{2}$$

whereas $\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T})$ (which is equal to $\mathrm{Cl}^d_P(\mathcal{T})$) contains a theory with the formula (2).

More generally, for $\mathrm{Cl}^d_P(\mathcal{T})$ with infinite $\mathcal{T}$, we have the following.

Since there are no links between distinct P_i, the structures of $p_\infty(x)$ are defined as disjoint unions of connected components $C(a)$, for a realizing $p_\infty(x)$, where each $C(a)$ consists of a set of realizations of p_∞-preserving formulas $\psi(a,x)$ (i.e., of formulas $\varphi(a,x)$ with $\psi(a,x) \vdash p_\infty(x)$). Similar to Proposition 5.2 theories $T_{\infty,C(a)}$ of $C(a)$-restrictions of $\mathcal{A}_\infty$ coincide and are characterized by the following property: $T_{\infty,C(a)} \in \mathrm{Cl}^d_P(\mathcal{T})$ if and only if $T_{\infty,C(a)} \in \mathcal{T}$ or for any formula $\varphi \in T_{\infty,C(a)}$ there are infinitely many theories T in $\mathcal{T}$ such that φ satisfies all structures approximating $C(a)$-restrictions of models of T.

Similarly to Theorem 5.3, Corollary 5.4, and Theorem 5.5 we have the following three assertions for disjoint P-combinations.

Theorem 5.8. [15]. *For any sets* $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1 \subset \overline{\mathcal{T}}$, $\mathrm{Cl}^d_P(\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1) = \mathrm{Cl}^d_P(\mathcal{T}_0) \cup \mathrm{Cl}^d_P(\mathcal{T}_1)$.

Corollary 5.9. [15]. (Exchange property) If $T_1 \in \mathrm{Cl}^d_P(\mathcal{T} \cup \{T_2\}) \setminus \mathrm{Cl}^d_P(\mathcal{T})$ then $T_2 \in \mathrm{Cl}^d_P(\mathcal{T} \cup \{T_1\})$.

Let $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$ be a set, $\mathcal{O}^d_P(\mathcal{T}) = \{\mathcal{T} \setminus \mathrm{Cl}^d_P(\mathcal{T}') \mid \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}\}$.

Theorem 5.10. [15]. *For any set* $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$ *the pair* $(\mathcal{T}, \mathcal{O}^d_P(\mathcal{T}))$ *is a topological* T_0*-space.*

Remark 5.11. [15]. By Proposition 5.6 (2), for any finite $\mathcal{T}$ the spaces $(\mathcal{T}, \mathcal{O}_P(\mathcal{T}))$ and $(\mathcal{T}, \mathcal{O}^d_P(\mathcal{T}))$ are Hausdorff, moreover, here $\mathcal{O}_P(\mathcal{T}) = \mathcal{O}^d_P(\mathcal{T})$ consists of all subsets of $\mathcal{T}$. However, in general, the spaces $(\mathcal{T}, \mathcal{O}_P(\mathcal{T}))$ and $(\mathcal{T}, \mathcal{O}^d_P(\mathcal{T}))$ are not Hausdorff.

Indeed, consider structures $\mathcal{A}_i$, for $i \in I$, where $I = (\omega + 1) \setminus \{0\}$, of the empty language and such that $|\mathcal{A}_i| = i$. Let $T_i = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$, where $i \in I$, and $\mathcal{T} = \{T_i \mid i \in I\}$. Coding the theories T_i by their indexes we have $\mathrm{Cl}_P(F) = \mathrm{Cl}^d_P(F) = F$ for any finite set $F \subset I$, and $\mathrm{Cl}_P(\mathrm{INF}) = \mathrm{Cl}^d_P(\mathrm{INF}) = I$ for any infinite set $\mathrm{INF} \subseteq I$. So, any open set U is either cofinite or empty. Thus any two nonempty open sets are not disjoint.

Remark 5.12. [15]. If the closure operator $\mathrm{Cl}^{d,r}_P$ is obtained from Cl^d_P permitting repetitions of structures for predicates P_i, we can lose both the property of T_0-space and the identical closure for finite sets of theories. Indeed, for the example in Remark 5.11, $\mathrm{Cl}^{d,r}_P(\mathcal{T})$ is equal to the $\mathrm{Cl}^{d,r}_P$-closure of any singleton $\{T\} \in \mathrm{Cl}^{d,r}_P(\mathcal{T})$ since the type $p_\infty(x)$ has arbitrarily many realizations producing models for each element in $\mathcal{T}$. Thus, there are only two possibilities for open sets U: either $U = \varnothing$ or $U = \mathcal{T}$.

Remark 5.13. [15]. Let $\mathcal{T}_{\rm fin}$ be the class of all theories for finite structures. By compactness, for a set $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}_{\rm fin}$, the set ${\rm Cl}_E(\mathcal{T})$ is a subset of $\mathcal{T}_{\rm fin}$ if and only if models of $\mathcal{T}$ have bounded cardinalities, whereas ${\rm Cl}_P(\mathcal{T})$ is a subset of $\mathcal{T}_{\rm fin}$ if and only if $\mathcal{T}$ is finite. Proposition 5.2 and its P-analogue allows to describe both ${\rm Cl}_E(\mathcal{T})$ and ${\rm Cl}_P(\mathcal{T})$, in particular, the sets ${\rm Cl}_E(\mathcal{T})\setminus\mathcal{T}_{\rm fin}$ and ${\rm Cl}_P(\mathcal{T})\setminus\mathcal{T}_{\rm fin}$. Clearly, there is a broad class of theories in $\overline{\mathcal{T}}$ which do not lay in

$$\bigcup_{\mathcal{T}\subset\mathcal{T}_{\rm fin}}{\rm Cl}_E(\mathcal{T})\cup\bigcup_{\mathcal{T}\subset\mathcal{T}_{\rm fin}}{\rm Cl}^d_P(\mathcal{T}).$$

For instance, finitely axiomatizable theories with infinite models can not be a pproximated by theories in $\mathcal{T}_{\rm fin}$ in such way.

Remark 5.14. [15]. Proposition 5.2 shows that if a set $\mathcal{T}$ has theories only with models in an axiomatizable class K then theories in ${\rm Cl}_E(\mathcal{T})$ again have models only in K. At the same time, by Remark 5.7, this assertion does not hold for P-closures.

6 Generating subsets of E-closed sets

Definition. [15]. Let $\mathcal{T}_0$ be a closed set in a topological space $(\mathcal{T},\mathcal{O}_E(\mathcal{T}))$. A subset $\mathcal{T}'_0\subseteq\mathcal{T}_0$ is said to be *generating* if $\mathcal{T}_0={\rm Cl}_E(\mathcal{T}'_0)$. The generating set $\mathcal{T}'_0$ (for $\mathcal{T}_0$) is *minimal* if $\mathcal{T}'_0$ does not contain proper generating subsets. A minimal generating set $\mathcal{T}'_0$ is *least* if $\mathcal{T}'_0$ is contained in each generating set for $\mathcal{T}_0$.

Remark 6.1. [15]. Each set $\mathcal{T}_0$ has a generating subset $\mathcal{T}'_0$ with cardinality $\leq\max\{|\Sigma|,\omega\}$, where Σ is the union of the languages for the theories in $\mathcal{T}_0$. Indeed, the theory $T={\rm Th}(\mathcal{A}_E)$, whose E-classes are models for theories in ${\rm Cl}_E(\mathcal{T}_0)$, has a model $\mathcal{M}$ with $|M|\leq\max\{|\Sigma|,\omega\}$. The E-classes of $\mathcal{M}$ are models of theories in ${\rm Cl}_E(\mathcal{T}_0)$ and the set of these theories is the required generating set.

Theorem 6.2. [15]. *If $\mathcal{T}'_0$ is a generating set for a E-closed set $\mathcal{T}_0$ then the following conditions are equivalent:*

(1). *$\mathcal{T}'_0$ is the least generating set for $\mathcal{T}_0$;*

(2). *$\mathcal{T}'_0$ is a minimal generating set for $\mathcal{T}_0$;*

(3). *any theory in $\mathcal{T}'_0$ is isolated by some set $(\mathcal{T}'_0)_\varphi$, i.e., for any $T\in\mathcal{T}'_0$ there is $\varphi\in T$ such that $(\mathcal{T}'_0)_\varphi=\{T\}$;*

(4). *any theory in $\mathcal{T}_0'$ is isolated by some set $(\mathcal{T}_0)_\varphi$, i.e., for any $T \in \mathcal{T}_0'$ there is $\varphi \in T$ such that $(\mathcal{T}_0)_\varphi = \{T\}$.*

Theorem 6.2 immediately implies

Corollary 6.3. [15]. *For any structure $\mathcal{A}_E$, $\mathcal{A}_E$ is e-minimal if and only if it is e-least.*

Definition. [15]. Let T be the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$, where $\mathcal{A}_E = \mathrm{Comb}_E(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$, $\{\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i) \mid i \in I\} = \mathcal{T}_0$. We say that T has a *minimal/least generating set* if $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0)$ has a minimal/least generating set.

Since by Theorem 6.2 the notions of minimality and being least coincide in the context, below we shall consider least generating sets as well as e-least structures in cases of minimal generating sets.

Proposition 6.4. [15]. *For any closed nonempty set $\mathcal{T}_0$ in a topological space $(\mathcal{T}, \mathcal{O}_E(\mathcal{T}))$ and for any $\mathcal{T}_0' \subseteq \mathcal{T}_0$, the following conditions are equivalent:*

(1). *$\mathcal{T}_0'$ is the least generating set for $\mathcal{T}_0$;*

(2). *any/some structure $\mathcal{A}_E = \mathrm{Comb}_E(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$, where $\{\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i) \mid i \in I\} = \mathcal{T}_0'$, is an e-least model of the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ and E-classes of each/some e-largest model of $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ form models of all theories in $\mathcal{T}_0$;*

(3). *any/some structure $\mathcal{A}_E = \mathrm{Comb}_E(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$, where $\{\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i) \mid i \in I\} = \mathcal{T}_0'$, $\mathcal{A}_i \not\equiv \mathcal{A}_j$ for $i \neq j$, is an e-least model of the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$, where E-classes of $\mathcal{A}_E$ form models of the least set of theories and E-classes of each/some e-largest model of $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ form models of all theories in $\mathcal{T}_0$.*

Corollary 6.5. [15]. *Any theory $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ with a prime model $\mathcal{M}$, or with a finite set $\{\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i) \mid i \in I\}$, or both with E-classes for $\mathcal{M}$ and $\mathcal{A}_i$ has the least generating set.*

Clearly, the converse for prime models does not hold, since finite sets $\mathcal{T}_0$ are least generating whereas theories in $\mathcal{T}_0$ can be arbitrary, in particular, without prime models. Again, the converse for finite sets does not hold since there are prime models with infinite $\mathcal{T}_0$. Finally, the general converse is not true since we can combine a theory T having a prime model with infinite $\mathcal{T}_0$ and a theory T' with infinitely many E-classes of disjoint languages and without prime models for these classes. Denoting by $\mathcal{T}_0'$ the set of theories for these E-classes, we obtain the least infinite generating set $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_0'$ for the combination of T and T', which does not have a prime model.

Theorem 6.6. *Any E-closed set $\mathcal{T}$ of language $\Sigma=\Sigma(\mathcal{T})$ has a generating subset $\mathcal{T}'$ of a cardinality $\leq\max\{|\Sigma|,\omega\}$.*

Proof. Without loss of generality we may assume that $\mathcal{T}$ is infinite with $|\mathcal{T}|>\max\{|\Sigma|,\omega\}$. For any Σ-sentence φ and the set $\mathcal{T}_\varphi$ we denote by $\mathcal{T}(\varphi)$ the set $\mathcal{T}_\varphi$, if $\mathcal{T}_\varphi$ is finite, and a countable subset of $\mathcal{T}_\varphi$, if $\mathcal{T}_\varphi$ is infinite. Now, we denote by $\mathcal{T}'$ the union of all sets $\mathcal{T}(\varphi)$. Clearly, $\mathcal{T}'\subseteq\mathcal{T}$ and $|\mathcal{T}'|\leq\max\{|\Sigma|,\omega\}$. We assert that $\mathcal{T}'$ generates $\mathcal{T}$. By Proposition 5.2 it suffices to show that for any $T\in\mathcal{T}\setminus\mathcal{T}'$ and $\varphi\in T$, the set $\mathcal{T}'_\varphi$ is infinite. Assuming that $\mathcal{T}'_\varphi$ is finite we have $\mathcal{T}'_\varphi=\mathcal{T}_\varphi$ which implies $T\in\mathcal{T}'$ by the definition of $\mathcal{T}'$ contradicting $T\in\mathcal{T}\setminus\mathcal{T}'$. Thus, $\mathcal{T}'$ is a generating subset of $\mathcal{T}$ with $|\mathcal{T}'|\leq\max\{|\Sigma|,\omega\}$. □

Notice that the estimation for the cardinality of generating set in Theorem 6.6 can not be improved in general case, since taking a set $\mathcal{T}$ of theories with $\lambda\geq\omega$ disjoint unary predicates, being independently empty and nonempty, it is impossible to find a generating subset $\mathcal{T}'\subseteq\mathcal{T}$ with $|\mathcal{T}|<\lambda$.

Replacing E-combinations by P-combinations we obtain the notions of (minimal/least) generating set for $\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T}_0)$.

Example in Remark 5.11 shows that Corollary 6.5 does not hold even for disjoint P-combinations. Indeed, take structures $\mathcal{A}_i$ for $i\in(\omega+1)\setminus\{0\}$, in the remark and the theories $T_i=\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$ forming the Cl^d_P-closed set $\mathcal{T}$. Since $\mathcal{T}$ is generated by any its infinite subset, we obtain that, having prime models of $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$, the closure $\mathrm{Cl}^d_P(\mathcal{T})$ does not have minimal generating sets.

For the example above, with the empty language, $\mathrm{Cl}^{d,r}_P(\mathcal{T})$ is generated by any singleton $\{T\}\in\mathrm{Cl}^{d,r}_P(\mathcal{T})$ since the type $p_\infty(x)$ has arbitrarily many realizations producing models for each T_i, where $i\in(\omega+1)\setminus\{0\}$. Thus, each element of $\mathrm{Cl}^{d,r}_P(\mathcal{T})$ forms a minimal generating set.

Natural questions arise concerning minimal generating sets:

Question 4. *What are characterizations for the existence of least generating sets?*

Question 5. *Is there exists a theory* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ (*respectively* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$) *without the least generating set?*

Remark 6.7. [15]. Obviously, for E-combinations, Question 4 has an answer in terms of Proposition 5.2 (clarified in Theorem 6.2) by taking the least (under inclusion) set $\mathcal{T}'_0$ generating the set $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}'_0)$. It means that $\mathcal{T}'_0$ does not have accumulation points inside $\mathcal{T}'_0$ (with respect to the sets $(\mathcal{T}'_0)_\varphi$), i.e., any element in $\mathcal{T}'_0$ is isolated by some formula, whereas each element T in $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}'_0)\setminus\mathcal{T}'_0$ is an accumulation point of $\mathcal{T}'_0$ (again with respect to $(\mathcal{T}'_0)_\varphi$.

A positive answer to Question 5 for Cl_P is obtained in Remark 5.11. Moreover, Theorem 6.2 does not hold with respect to the operator Cl^d_P. Indeed, the theories T_i for the structures $\mathcal{A}_i$, where $i \in (\omega+1)\setminus\{0\}$, form the Cl^d_P-closed set $\mathcal{T}_0$. Clearly, the theories T_i for finite i are isolated by formulas describing cardinalities for $\mathcal{A}_i$, whereas $\mathcal{T}_0$ does not have minimal generating sets since it is generated by a subset $\mathcal{T}'_0$ if and only if $\mathcal{T}'_0$ is infinite.

More generally, if $\mathcal{A}_i$ consist of finitely many isomorphic definable equivalence classes and the number of these classes is unbounded if varying the indexes i (taking, for instance, models of cubic theories [21, 22] with a fixed finite diameter, or isomorphic trees with a fixed finite diameter), then, as above, the P-closure $\mathcal{T}_0$ of the set of theories $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_i)$ does not have minimal generating sets.

Remark 6.7 shows that Theorem 6.2 fails for the operator Cl^d_P. At the same we have

Theorem 6.8. [15]. *If $\mathcal{T}'_0$ is a generating set for a P-closed set $\mathcal{T}_0$ with respect to the operator Cl^d_P, then the following conditions are equivalent:*

(1). *$\mathcal{T}'_0$ is the least generating set for $\mathcal{T}_0$,*

(2). *$\mathcal{T}'_0$ is a minimal generating set for $\mathcal{T}_0$.*

In contrast to Remark 6.7 we have

Proposition 6.9. [15]. *If e-$\mathrm{Sp}(T)$ is finite for a theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$ then the set $\mathcal{T}$ of theories for substructures $\mathcal{A}_i$ in $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_P$ with respect to the predicates P_i and to the type $p_\infty(x)$ has a least generating set.*

7 Language uniform theories and related E-closures

In this section, we consider a class of special theories with respect to their languages and answer Question 4 characterizing the existence of the least generating set in these special cases.

Definition. [23]. A theory T in a predicate language Σ is called *language uniform* or a LU-*theory* if for each arity n any substitution on the set of non-empty n-ary predicates preserves T. The LU-theory T is called IILU-*theory* if it has non-empty predicates and as soon as there is a non-empty n-ary predicate there are infinitely many non-empty n-ary predicates and there are infinitely many empty n-ary predicates.

Let T_0 be a LU-theory with infinitely many nonempty predicate of some arity n and I_0 be the set of indexes for the symbols of these predicates.

Now for each infinite $I \subseteq I_0$ with $|I| = |I_0|$, we denote by T_I the theory which is obtained from the complete subtheory of T_0 in the language $\{R_k \mid k \in I\}$ united with symbols of all arities $m \neq n$ and expanded by empty predicates R_l for $l \in I_0 \setminus I$, where $|I_0 \setminus I|$ is equal to the cardinality of the set empty predicates for T_0, of the arity n.

Let $\mathcal{T}$ be an infinite family of theories T_I and T_J be a theory of the form above (with infinite $J \subseteq I_0$ such that, $|J| = |I_0|$). The following proposition modifies Proposition 5.2 for the E-closure $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$.

Proposition 7.1. [23]. *If $T_J \notin \mathcal{T}$ then $T_J \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ if and only if for any finite set $J_0 \subset I_0$ there are infinitely many T_I with $J \cap J_0 = I \cap J_0$.*

Now we take an infinite family F of infinite indexes I such that F is linearly ordered by $\subseteq$ and if $I_1 \subset I_2$ then $I_2 \setminus I_1$ is infinite. The set $\{T_I \mid I \in F\}$ is denoted by $\mathcal{T}_F$.

For any infinite $F' \subseteq F$ we denote by $\overline{\lim} F'$ the union-set $\bigcup F'$ and by $\underline{\lim} F'$ the intersection-set $\bigcap F'$. If $\overline{\lim} F'$ (respectively $\underline{\lim} F'$) does not belong to F' then it is called the *upper* (*lower*) *accumulation point* (for F'). If J is an upper or lower accumulation point we simply say that J is an *accumulation point.*

Proposition 7.1 implies

Corollary 7.2. [23]. *If $T_J \notin \mathcal{T}_F$ then $T_J \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_F)$ if and only if J is an* (*upper or lower*) *accumulation point for some infinite $F' \subseteq F$.*

By Corollary 7.2 the action of the operator Cl_E for the families $\mathcal{T}_F$ is reduced to unions and intersections of *index* subsets of F.

Now, we consider possibilities for the linearly ordered sets $\mathcal{F} = \langle F; \subseteq\rangle$ and their closures $\overline{\mathcal{F}} = \langle \overline{F}; \subseteq\rangle$ related to Cl_E.

The structure $\mathcal{F}$ is called *discrete* if F does not contain accumulation points.

By Corollary 7.2, if $\mathcal{F}$ is discrete then $T_J \notin \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_{F\setminus\{J\}})$ for any $J \in F$. Thus we obtain

Proposition 7.3. [23]. *For any discrete $\mathcal{F}$, $\mathcal{T}_F$ is the least generating set for* $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_F)$.

By Proposition 7.3, for any discrete $\mathcal{F}$, $\mathcal{T}_F$ can be reconstructed from $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_F)$ removing accumulation points, that always exist. For instance, if $\langle F; \subseteq\rangle$ is isomorphic to $\langle \omega; \leq\rangle$ or $\langle \omega^*; \leq\rangle$ (respectively, isomorphic to $\langle \mathbb{Z}; \leq\rangle$) then $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_F)$ has exactly one (two) new element(s) $\overline{\lim} F$ or $\underline{\lim} F$ (both $\overline{\lim} F$ and $\underline{\lim} F$).

Consider an opposite case: with dense $\mathcal{F}$. Here, if $\mathcal{F}$ is countable then, similarly to $\langle\mathbb{Q};\leq\rangle$, taking cuts for $\mathcal{F}$, i.e., partitions (F^-, F^+) of F with $F^- < F^+$, we obtain the closure $\overline{F}$ with continuum many elements. Thus, the following proposition holds.

Proposition 7.4. [23]. *For any dense $\mathcal{F}$, $|\overline{F}| \geq 2^\omega$.*

Clearly, there are dense $\mathcal{F}$ with dense and non-dense $\overline{\mathcal{F}}$. If $\overline{\mathcal{F}}$ is dense then, since $\overline{\overline{F}} = \overline{F}$, there are dense $\mathcal{F}_1$ with $|F_1| = |\overline{F_1}|$. In particular, it is followed by Dedekind theorem on completeness of $\mathbb{R}$.

Answering the Question 5 we have

Proposition 7.5. [23]. *If $\overline{\mathcal{F}}$ is dense then* $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_F)$ *does not contain the least generating set.*

Combining Proposition 6.4 and Proposition 7.5 we obtain

Corollary 7.6. [23]. *If $\overline{\mathcal{F}}$ is dense then* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ *does not have e-least models and, in particular, it is not small.*

Remark 7.7. [23]. The condition of the density of $\overline{\mathcal{F}}$ for Proposition 7.5 is essential. Indeed, we can construct step-by step a countable dense structure $\mathcal{F}$ without endpoints such that for each $J \in F$ and for its cut (F_J^-, F_J^+), where $F_J^- = \{J^- \in F \mid J^- \subset J\}$ and $F_J^+ = \{J^+ \in F \mid J^+ \supset J\}$, $J \supset \overline{\lim} F_J^-$ and $J \subset \underline{\lim} F_J^+$. In this case, $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_F)$ contains the least generating set $\{T_J \mid J \in F\}$.

Theorem 7.8. [23]. *For any linearly ordered set $\mathcal{F}$, the following conditions are equivalent:*

(1). $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_F)$ *has the least generating set;*

(2). $\overline{\mathcal{F}}$ *does not have dense intervals.*

Remark 7.9. [23]. Theorem 7.8 does not hold for some non-linearly ordered $\mathcal{F}$. Indeed, taking countably many disjoint, incomparable with respect to nonempty predicates modulo their intersections, copies $\mathcal{F}_q$, where $q \in \mathbb{Q}$, of linearly ordered sets isomorphic to $\langle\omega,\leq\rangle$ and ordering limits $J_q = \underline{\lim} F_q$ by the ordinary dense order on $\mathbb{Q}$ such that $\{J_q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ is densely ordered, we obtain a dense interval $\{J_q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ whereas the set $\cup\{F_q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ forms the least generating set $\mathcal{T}_0$ of theories for $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0)$.

The above operation of extensions of theories for $\{J_q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ by theories for $\mathcal{F}_q$ as well as expansions of theories of the empty language to theories for $\{J_q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ confirm that the (non)existence of a least/minimal generating set for $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0)$ is not preserved under restrictions and expansions of theories.

Remark 7.10. [23]. Taking an arbitrary theory T with a non-empty predicate R of an arity n, we can modify Theorem 7.8 in the following way. Extending the language $\Sigma(T)$ by infinitely many n-ary predicates interpreted exactly as R and by infinitely many empty n-ary predicates we obtain a class $\mathcal{T}_{T,R}$ of theories *R-generated* by T.

The class $\mathcal{T}_{T,R}$ satisfies the following: any linearly ordered set $\mathcal{F}$ as above is isomorphic to some family $\mathcal{F}'$, under inclusion, of sets of indexes for non-empty predicates of theories in $\mathcal{T}_{T,R}$ such that strict inclusions $J_1 \subset J_2$ for elements in $\mathcal{F}'$ imply that cardinalities of $J_2 \setminus J_1$ are infinite and do not depend on choice of J_1 and J_2. Theorem 7.8 holds for linearly ordered $\mathcal{F}'$ involving the given theory T.

8 On e-spectra for families of language uniform theories

Remark 8.1. [23]. Remind that by Proposition 4.1 (7), if $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ has an e-least model $\mathcal{M}$ then e-$\mathrm{Sp}(T) = e$-$\mathrm{Sp}(\mathcal{M})$. Then, following Proposition 4.1 (5), e-$\mathrm{Sp}(T) = |\mathcal{T}_0 \setminus \mathcal{T}'_0|$, where $\mathcal{T}'_0$ is the (least) generating set of theories for E-classes of $\mathcal{M}$, and $\mathcal{T}_0$ is the closed set of theories for E-classes of an e-largest model of T. Note also that e-$\mathrm{Sp}(T)$ is infinite if $\mathcal{T}_0$ does not have the least generating set.

Remind that, as shown in Propositions 4.3, for any cardinality λ there is a theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ of a language Σ such that $|\Sigma| = |\lambda+1|$ and e-$\mathrm{Sp}(T) = \lambda$. Modifying this proposition for the class of LU-theories we obtain

Proposition 8.2. [23]. (1) *For any $\mu \leq \omega$ there is an E-combination $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ of* IILU*-theories in a language Σ of the cardinality ω such that T has an e-least model and* e-$\mathrm{Sp}(T) = \mu$.
(2) *For any uncountable cardinality λ there is an E-combination $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ of* IILU*-theories in a language Σ of the cardinality λ such that T has an e-least model and* e-$\mathrm{Sp}(T) = \lambda$.

Combining Propositions 6.4, 7.5, Theorem 7.8, and Remark 8.1 with $\overline{\mathcal{F}}$ having dense intervals, we have

Proposition 8.3. [23]. *For any infinite cardinality λ there is an E-combination $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ of* IILU*-theories in a language Σ of cardinality λ such that T does not have e-least models and* e-$\mathrm{Sp}(T) \geq \max\{2^\omega, \lambda\}$.

Assertion of Proposition 8.3 can be improved as follows.

Proposition 8.4. [23]. *For any infinite cardinality λ there is an E-combination $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ of* LU*-theories in a language Σ of cardinality λ such that T does not have e-least models and* e-$\mathrm{Sp}(T) = 2^\lambda$.

9 Cantor—Bendixson ranks for language uniform theories

Recall the definition of the Cantor—Bendixson rank. It is defined on the elements of a topological space X by induction: $\mathrm{CB}_X(p) \geq 0$ for all $p \in X$; $\mathrm{CB}_X(p) \geq \alpha$ if and only if for any $\beta < \alpha$, p is an accumulation point of the points of CB_X-rank at least β. $\mathrm{CB}_X(p) = \alpha$ if and only if both $\mathrm{CB}_X(p) \geq \alpha$ and $\mathrm{CB}_X(p) \ngeq \alpha+1$ hold; if such ordinal α does not exist then $\mathrm{CB}_X(p) = \infty$. Isolated points of X are precisely those having rank 0, points of rank 1 are those which are isolated in the subspace of all non-isolated points, and so on. For a non-empty $C \subseteq X$ we define $\mathrm{CB}_X(C) = \sup\{\mathrm{CB}_X(p) \mid p \in C\}$; in this way $\mathrm{CB}_X(X)$ is defined and $\mathrm{CB}_X(\{p\}) = \mathrm{CB}_X(p)$ holds. If X is compact and C is closed in X then the sup is achieved: $\mathrm{CB}_X(C)$ is the maximum value of $\mathrm{CB}_X(p)$ for $p \in C$; there are finitely many points of maximum rank in C and the number of such points is the CB_X-*degree* of C. If X is countable and compact then $\mathrm{CB}_X(X)$ is a countable ordinal and every closed subset has ordinal-valued rank and finite CB_X-degree.

Clearly, for any set $\mathcal{F}$, where $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_F)$ does not have the least generating set, $\mathrm{CB}_{\mathcal{T}_F}(\mathcal{T}_F) = \infty$.

Theorem 9.1. [23]. *For any countable ordinal α and a natural number $n > 0$, there is an E-closed family $\mathcal{T}_{F_\alpha}$ of* LU*-theories such that $\mathrm{CB}_{\mathcal{T}_{F_\alpha}}(\mathcal{T}_{F_\alpha}) = \alpha$ and its $\mathrm{CB}_{\mathcal{T}_{F_\alpha}}$-degree is equal to n.*

10 Relative e-spectra and their properties

Definition. [24]. For a structure $\mathcal{A}_E$ and a class K of structures, the number of *new* structures with respect to the structures $\mathcal{A}_i$ and to the class K, i.e., of the structures $\mathcal{B}$ forming E-classes of models of $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ such that $\mathcal{B}$ are pairwise elementary non-equivalent and are elementary equivalent to neither the structures $\mathcal{A}_i$ in $\mathcal{A}_E$ nor to the structures in K, is called the *relative e-spectrum* of $\mathcal{A}_E$ with respect to K and denoted by e_K-$\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_E)$. The value $\sup\{e_K\text{-}\mathrm{Sp}(\mathcal{A}') \mid \mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E\}$ is called the *relative e-spectrum* of the theory $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ with respect to K and denoted by e_K-$\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E))$.

Similarly for a class $\mathcal{T}$ of theories and for a theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ we denote by $e_{\mathcal{T}}$-$\mathrm{Sp}(T)$ the value e_K-$\mathrm{Sp}(T)$, where $K = K(\mathcal{T})$ is the class of all structures, each of which is a model of a theory in $\mathcal{T}$. The value $e_{\mathcal{T}}$-Sp(T) is called the *relative e-spectrum* of the theory T with respect to $\mathcal{T}$.

Remark 10.1. [24]. 1. The class $K(\mathcal{T})$, in the definition above, can be replaced by any subclass $K'\subseteq K(\mathcal{T})$ such that any structure in $K(\mathcal{T})$ is elementary equivalent to a structure in K'.
2. If $K_1\subseteq K_2$ then e_{K_1}-Sp$(T)\geq e_{K_2}$-Sp(T), and if $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$ then $e_{\mathcal{T}_1}$-Sp$(T)\geq e_{\mathcal{T}_2}$-Sp$(T)$.
3. The value $e_{\mathcal{T}}$-Sp(T) is equal to the supremum $|\mathcal{T}_1\setminus\mathcal{T}_0|$ for theories of E-classes of models for T such that $\mathcal{T}_1$ consists of all these theories and $\mathcal{T}_0\subseteq\mathcal{T}_1$ with $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0)=\mathcal{T}_1$.

Definition. [24]. Two theories T_1 and T_2 of a language Σ are *disjoint* modulo Σ_0, where $\Sigma_0\subseteq\Sigma$, or Σ_0-*disjoint* if T_1 and T_2 do not have common nonempty predicates for $\Sigma\setminus\Sigma_0$. If T_1 and T_2 are $\varnothing$-disjoint, these theories are called simply *disjoint*.

Families $\mathcal{T}_j$, where $j\in J$, of theories in the language Σ are *disjoint* modulo Σ_0, or Σ_0-*disjoint* if T_{j_1} and T_{j_2} are Σ_0-disjoint for any $T_{j_1}\in\mathcal{T}_{j_1}$, $T_{j_2}\in\mathcal{T}_{j_2}$, where $j_1\neq j_2$. If T_{j_1} and T_{j_2} are disjoint for any $T_{j_1}\in\mathcal{T}_{j_1}$, $T_{j_2}\in\mathcal{T}_{j_2}$, where $j_1\neq j_2$, then the families $\mathcal{T}_j$, where $j\in J$, are *disjoint* too.

The following properties are obvious.

1. Any families of theories in a language Σ are Σ-disjoint.

2. (Monotony) If $\Sigma_0\subseteq\Sigma_1\subseteq\Sigma$ then disjoint families modulo Σ_0, in the language Σ, are disjoint modulo Σ_1.

3. (Monotony) If families $\mathcal{T}_{j_1}$ and $\mathcal{T}_{j_2}$ are Σ_0-disjoint so are any subfamilies $\mathcal{T}'_{j_1}\subseteq\mathcal{T}_{j_1}$ and $\mathcal{T}'_{j_2}\subseteq\mathcal{T}_{j_2}$.

Below, we denote by K_Σ the class of all structures in languages containing Σ such that all predicates outside Σ are empty. Similarly, we denote by $\mathcal{T}_\Sigma$ the class of all theories of structures in K_Σ.

Theorem 10.2. [24]. *(Relative additivity for e-spectra) If $\mathcal{T}_j$, where $j\in J$, are Σ_0-disjoint families then for the E-combination $T=\mathrm{Comb}_E(T_i)_{i\in I}$ of $\{T_i\mid i\in I\}=\bigcup\limits_{j\in J}\mathcal{T}_j$ and for the E-combinations $T_j=\mathrm{Comb}_E(\mathcal{T}_j)$, where $j\in J$*

$$e_{\mathcal{T}_{\Sigma_0}}\text{-Sp}(T)=\sum_{j\in J}(e_{\mathcal{T}_{\Sigma_0}}\text{-Sp}(T_j)). \qquad (3)$$

Remark 10.3. [24]. Having positive ComLim the equality (3)) can fail if families $\mathcal{T}_j$ are not Σ_0-disjoint, even for finite sets J of indexes producing

$$e_{\mathcal{T}_{\Sigma_0}}\text{-Sp}(T') < \sum_{j\in J}(e_{\mathcal{T}_{\Sigma_0}}\text{-Sp}(T_j)) \tag{4}$$

for appropriate T'.

Theorem 10.2 immediately implies

Corollary 10.4. [24]. *If $\mathcal{T}_j$, where $j \in J$, are disjoint then for the E-combination $T = \mathrm{Comb}_E(T_i)_{i\in I}$ of $\{T_i \mid i \in I\} = \bigcup\limits_{j\in J} \mathcal{T}_j$ and for the E-combinations $T_j = \mathrm{Comb}_E(\mathcal{T}_j)$, $j \in J$*

$$e_{\mathcal{T}_\varnothing}\text{-Sp}(T) = \sum_{j\in J}(e_{\mathcal{T}_\varnothing}\text{-Sp}(T_j)). \tag{5}$$

Definition. [24]. The theory T in Theorem 10.2 is called the Σ_0-*disjoint E-union* of the theories T_j, where $j \in J$, and the theory T in Corollary 10.4 is the *disjoint E-union* of the theories T_j, where $j \in J$.

Remark 10.5. [24] Additivity (3) and, in particular, (5) can be failed without indexes $\mathcal{T}_{\Sigma_0}$. Indeed, it is possible to find T_j with e-Sp$(T_j) = 0$ (for instance, with finite $\mathcal{T}_j$) while e-Sp(T) can be positive. Take, for example, disjoint singletons $\mathcal{T}_n = \{T_n\}$ for $n \in \omega \setminus \{0\}$ such that T_n has n-element models. We have e-Sp$(T_n) = 0$ for each n while e-Sp$(T) = 1$, since the theory $T_\infty \in \mathcal{T}_\varnothing$ with infinite models belongs to $\mathrm{Cl}_E(\{T_n \mid n \in \omega \setminus \{0\}\})$. Thus, for disjoint families $\mathcal{T}_j$, $j \in J$, the equality

$$e\text{-Sp}(T) = \sum_{j\in J}(e\text{-Sp}(T_j)) \tag{6}$$

can fail. Moreover, producing the effect above for definable subsets in models of T_j we obtain

$$e_{\mathcal{T}_{\Sigma_0}}\text{-Sp}(T) > \sum_{j\in J}(e_{\mathcal{T}_{\Sigma_0}}\text{-Sp}(T_j)).$$

At the same time, by Corollary 10.4 (respectively, by Theorem 10.2) the equality (6) holds for (Σ_0-)disjoint families $\mathcal{T}_j$, where $j \in J$, if J is finite and each $\mathcal{T}_j$ does not generate theories in $\mathcal{T}_\varnothing$ (in $\mathcal{T}_{\Sigma_0}$).

Proposition 10.6. [24]. *For any positive cardinality λ there is a theory T such that ' E-classes of models of T form copies T_j, for $j \in J$, of some E-combination T_0 with a language Σ in the cardinality $\lambda+1$, with $e_{\mathcal{T}_\varnothing}$-Sp$(T_0) = \lambda$, and $e_{\mathcal{T}_\varnothing}$-Sp$(T) = |J| \cdot \lambda$.*

Remark 10.7. [24]. Extending the Σ_0-disjoint Σ_0-coordinated E-union T by definable bijections linking E-classes we can omit the additivity (3). Indeed, adding, for instance, bijections f_{jk} witnessing isomorphisms for models of disjoint copies T_j and T_j, we have $e_{\mathcal{T}_\varnothing}$-Sp$(T_j)$ instead of $e_{\mathcal{T}_\varnothing}$-Sp$(T_j) + e_{\mathcal{T}_\varnothing}$-Sp$(T_k)$. Thus, bijections f_{jk} allow to vary $e_{\mathcal{T}_\varnothing}$-Sp$(T)$ from λ to $|J| \cdot \lambda$ in terms of Proposition 10.6. Thus the equality (3) can fail again producing (4) for appropriate T'.

11 Families of theories with(out) least generating sets

Below, we apply Theorem 6.2 characterizing the existence of e-least generating sets for Σ_0-disjoint families of theories.

The following natural questions arises:

Question 6. *When the existence of the least generating sets for the families $\mathcal{T}_j$, for $j \in J$, is equivalent to the existence of the least generating set for the family $\bigcup\limits_{j\in J} \mathcal{T}_j$?*

Question 7. *Is it true that under conditions of Theorem 10.2 the existence of the least generating sets for the families $\mathcal{T}_j$, where $j \in J$, is equivalent to the existence of the least generating set for the family $\bigcup\limits_{j\in J} \mathcal{T}_j$?*

Considering Question 7, we note below that the property of the (non)existence of the least generating sets is not preserving under expansions and extensions of families of theories.

Proposition 11.1. [24]. *Any E-closed family $\mathcal{T}_0$ of theories in a language Σ_0 can be transformed to an E-closed family $\mathcal{T}'_0$ in a language $\Sigma'_0 \supseteq \Sigma_0$ such that $\mathcal{T}'_0$ consists of expansions of theories in $\mathcal{T}_0$ and $\mathcal{T}'_0$ has the least generating set.*

Existence of families $\mathcal{T}_0$ without least generating sets implies

Corollary 11.2. [24]. *The property of non-existence of least generating sets is not preserved under expansions of theories.*

Proposition 11.3. [24]. *There is an E-closed family $\mathcal{T}_0$ of theories in a language Σ_0 and with the least generating set, which can be transformed to an E-closed family $\mathcal{T}'_0$ in a language $\Sigma'_0 \supseteq \Sigma_0$ such that $\mathcal{T}'_0$ consists of expansions of theories in $\mathcal{T}_0$ and $\mathcal{T}'_0$ does not have the least generating set.*

Corollary 11.4. [24]. *The property of existence of least generating sets is not preserved under expansions of theories.*

Proposition 11.5. [24]. *Any family $\mathcal{T}_0$ of theories in a language Σ with infinitely many empty predicates for all theories in $\mathcal{T}_0$ can be extended to a family $\mathcal{T}_0'$ in the language Σ such that $\mathcal{T}_0'$ does not have the least generating set.*

Corollary 11.6. [24]. *The property of existence of least generating sets is not preserved under extensions of sets of theories.*

In view of Theorem 6.2, any family consisting of all theories in a given infinite language has neither the least generating set nor a proper extension in the given language. Thus, there are families of theories without least generating sets and without extensions having least generating sets. At the same time, the following proposition holds.

Proposition 11.7. [24]. *There is an E-closed family $\mathcal{T}_0$ of theories in a language Σ and without the least generating set such that $\mathcal{T}_0$ can be extended to an E-closed family $\mathcal{T}_0'$ in the language Σ and with the least generating set.*

Corollary 11.8. [24]. *The property of non-existence of least generating sets is not preserved under extensions of sets of theories.*

The following proposition answers Question 6.

Proposition 11.9. [24]. *The set $\bigcup\limits_{j\in J}\mathcal{T}_j$ has the least generating set if and only if $\left(\bigcup\limits_{j\in J}\mathcal{T}_j\right)\cap\mathcal{T}_{\Sigma_0}$ has the least generating set and each $\mathcal{T}_j\setminus\mathcal{T}_{\Sigma_0}$ has the least generating set.*

Since $\left(\bigcup\limits_{j\in J}\mathcal{T}_j\right)\cap\mathcal{T}_{\Sigma_0}$ can be an arbitrary extension of each $\mathcal{T}_j\cap\mathcal{T}_{\Sigma_0}$, Propositions 11.5 and 11.9 imply the following corollary answering Question 7.

Corollary 11.10. [24]. *For any infinite language Σ_0 there are Σ_0-disjoint families $\mathcal{T}_j$, where $j\in J$, with the least generating sets such that $\bigcup\limits_{j\in J}\mathcal{T}_j$ does not have the least generating set.*

12 Relative closures and relative least generating sets

Definition. [24]. Let $\mathcal{T}$ be a class of theories. For a set $\mathcal{T}_0 \subset \overline{\mathcal{T}}$ we denote by $\mathrm{Cl}_{E,\mathcal{T}}(\mathcal{T}_0)$ the set $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0) \setminus \mathcal{T}$. The set $\mathrm{Cl}_{E,\mathcal{T}}(\mathcal{T}_0)$ is called the *relative E-closure* of the set $\mathcal{T}_0$ with respect to $\mathcal{T}$, or *$\mathcal{T}$-relative E-closure*. If $\mathcal{T}_0 \setminus \mathcal{T} = \mathrm{Cl}_{E,\mathcal{T}}(\mathcal{T}_0)$ then $\mathcal{T}_0$ is said to be (relatively) *E-closed with respect to $\mathcal{T}$*, or *$\mathcal{T}$-relatively E-closed*.

Let $\mathcal{T}_0$ be a closed set in a topological space $(\mathcal{T}, \mathcal{O}_E(\mathcal{T}))$. A subset $\mathcal{T}'_0 \subseteq \mathcal{T}_0$ is said to be *generating* with respect to $\mathcal{T}$ or *$\mathcal{T}$-relatively generating*, if $\mathcal{T}_0 \setminus \mathcal{T} = \mathrm{Cl}_{E,\mathcal{T}}(\mathcal{T}'_0)$. The $\mathcal{T}$-relatively generating set $\mathcal{T}'_0$ (for $\mathcal{T}_0$) is *$\mathcal{T}$-minimal* if $\mathcal{T}'_0 \setminus \mathcal{T}$ does not contain proper subsets $\mathcal{T}''_0$ such that $\mathcal{T}_0 \setminus \mathcal{T} = \mathrm{Cl}_{E,\mathcal{T}}((\mathcal{T}'_0 \cap \mathcal{T}) \cup \mathcal{T}''_0)$. A $\mathcal{T}$-minimal $\mathcal{T}$-relatively generating set $\mathcal{T}'_0$ is *$\mathcal{T}$-least* if $\mathcal{T}'_0 \setminus \mathcal{T}$ is contained in $\mathcal{T}''_0 \setminus \mathcal{T}$ for each $\mathcal{T}$-relatively generating set $\mathcal{T}''_0$ for $\mathcal{T}_0$.

The following theorem generalizes Theorem 6.2.

Theorem 12.1. [24]. *If $\mathcal{T}$ is an E-closed set and $\mathcal{T}'_0$ is a $\mathcal{T}$-relatively generating set for an E-closed set $\mathcal{T}_0$ then the following conditions are equivalent:*

(1). *$\mathcal{T}'_0$ is the $\mathcal{T}$-least generating set for $\mathcal{T}_0$;*

(2). *$\mathcal{T}'_0$ is a $\mathcal{T}$-minimal generating set for $\mathcal{T}_0$;*

(3). *any theory in $\mathcal{T}'_0 \setminus \mathcal{T}$ is isolated by some set $(\mathcal{T}'_0 \cup \mathcal{T})_\varphi$;*

(4). *any theory in $\mathcal{T}'_0 \setminus \mathcal{T}$ is isolated by some set $(\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T})_\varphi$;*

(5). *any theory in $\mathcal{T}'_0 \setminus \mathcal{T}$ is isolated by some set $(\mathcal{T}'_0)_\varphi$;*

(6). *any theory in $\mathcal{T}'_0 \setminus \mathcal{T}$ is isolated by some set $(\mathcal{T}_0)_\varphi$.*

Corollary 12.2. [24]. *If $\mathcal{T}_j$, where $j \in J$, are Σ_0-disjoint families then $\bigcup\limits_{j\in J} \mathcal{T}_j$ has a $\mathcal{T}_{\Sigma_0}$-least generating set if and only if each $\mathcal{T}_j$ has a $\mathcal{T}_{\Sigma_0}$-least generating set. Moreover, if $\bigcup\limits_{j\in J} \mathcal{T}_j$ has a $\mathcal{T}_{\Sigma_0}$-least generating set $\mathcal{T}_0$ then $\mathcal{T}_0 \setminus \mathcal{T}_{\Sigma_0}$ can be represented as a disjoint union of $\mathcal{T}_{\Sigma_0}$-least generating sets for $\mathcal{T}_j$.*

Clearly, any subset of $\mathcal{T}$-least generating set is again a $\mathcal{T}$-least generating set (for its E-closure). At the same time, the property "to be a $\mathcal{T}$-least generating set" is preserved under finite extensions of generating sets $\mathcal{T}'_0$ disjoint with $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}'_0)$:

Proposition 12.3. [24]. *If $\mathcal{T}$ is an E-closed set, $\mathcal{T}'_0$ is a $\mathcal{T}$-relatively generating set for an E-closed set $\mathcal{T}_0$, and $\mathcal{T}_f$ is a finite subset of $\overline{\mathcal{T}}$ disjoint with $\mathcal{T}_0$ then the following conditions are equivalent:*

(1). *$\mathcal{T}'_0$ is the $\mathcal{T}$-least generating set for $\mathcal{T}_0$;*

(2). *$\mathcal{T}'_0 \cup (\mathcal{T}_f \setminus \mathcal{T}_0)$ is the $\mathcal{T}$-least generating set for the E-closed set $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_f$.*

Theorem 12.4. [24]. (Decomposition Theorem) *For any E-closed sets $\mathcal{T}$ and $\mathcal{T}'$ of a language Σ there is a $\mathcal{T}$-relatively generating set $\mathcal{T}'_0 \cup \mathcal{T}'_1$ for $\mathcal{T}'$, which is disjoint with $\mathcal{T}$ and satisfies the following conditions:*

(1). $|\mathcal{T}'_0 \cup \mathcal{T}'_1| \leq \max\{|\Sigma|, \omega\}$;

(2). *$\mathcal{T}'_0$ is the least generating set for its E-closure $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}'_0)$;*

(3). $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}'_0) \cap \mathcal{T}'_1 = \varnothing$;

(4). *$\mathcal{T}'_1$ is either empty or infinite and does not have infinite subsets satisfying* (2).

Theorem 12.5. [24]. *If T is an E-combination of some theories T_i, where $i \in I$, $\mathcal{T}$ is an E-closed set of theories, and $|e_{\mathcal{T}}\text{-}\mathrm{Sp}(T)| < 2^\omega$, then $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T} \cup \{T_i \mid i \in I\})$ has the $\mathcal{T}$-least generating set.*

13 Semilattices and lattices for families of theories

Definition. [25]. Let X be a nonempty set of E-closed families $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$. Operations $\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2 \rightleftharpoons \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ and $\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2 \rightleftharpoons \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$, for E-closed $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subset \overline{\mathcal{T}}$, generate a set Y and form the structure $\langle Y; \wedge, \vee\rangle$ denoted by $L(X)$.

It is well known [26], that any $L(X)$ is a lattice extensible to a complete lattice $\mathrm{CL}(X)$ with

$$\bigwedge_{j\in J} \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_j) = \bigcap_{j\in J} \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_j)$$

and

$$\bigvee_{j\in J} \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_j) = \mathrm{Cl}_E\left(\bigcup_{j\in J} \mathcal{T}_j\right).$$

By Theorem 5.3, $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ for E-closed $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, i.e., the operation $\vee$ is the set-theoretic union. At the same time, in general case,

$\bigvee\limits_{j\in J}\mathcal{T}_j \neq \bigcup\limits_{j\in J}\mathcal{T}_j$, for E-closed $\mathcal{T}_j$, since, for instance, the union of infinite set of singletons can generate new theories. Thus, $L(X)$ is just a standard algebra with usual set-theoretic unions and intersections (but can be without even relative complements since these complements can be not E-closed), whereas $\mathrm{CL}(X)$ is its natural extension.

Now we consider restrictions of $L(X)$ in the following way.

For a nonempty set X of E-closed families with the least generating sets, the operation $\vee$ generates a set $Z \subseteq Y$ and forms an upper semilattice $\mathrm{SLLGS}(X) = \langle Z; \vee\rangle$ restricting the universe and the language of $L(X)$. The structure $\mathrm{SLLGS}(X)$ always consists of families with the least generating sets whereas the operation $\wedge$ can generate a family without the least generating sets.

Proposition 13.1. [25]. *If E-closed sets $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$, in a language Σ, have the least generating sets then $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, being E-closed, has the least generating set.*

Theorem 13.2. [25]. 1. *For any nonempty set X of E-closed families with the least generating sets the structure* $\mathrm{SLLGS}(X)$ *is an upper semilattice.*
2. *There is an upper semilattice* $\mathrm{SLLGS}(X)$ *with elements $x_1, x_2 \in X$ having the least generating sets and such that $x_1 \cap x_2$ does not have the least generating set.*
3. *There is an upper semilattice* $\mathrm{SLLGS}(X)$ *which can not be extended to a complete semilattice consisting of families with the least generating sets.*

Now we take a nonempty set X of E-closed families with the least generating sets and $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in X$ with the least generating sets $\mathcal{T}'_1$ and $\mathcal{T}'_2$ respectively. We denote by $\mathcal{T}_1 \wedge' \mathcal{T}_2$ the family $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ with the greatest generating set $\mathcal{T}'_0$ consisting of all isolated points for $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

For a set X the operations $\wedge'$ and $\vee$ generate a set $U \supseteq X$ with a structure $\mathrm{LLGS}(X) \rightleftharpoons \langle U; \wedge', \vee\rangle$.

Theorem 13.3. [25]. *Any structure* $\mathrm{LLGS}(X)$ *is a distributive lattice.*

14 Closed classes of finitely categorical and ω-categorical theories

Recall that a countable complete theory T is *ω-categorical* if T has exactly one countable model up to isomorphism, i.e. $I(T,\omega) = 1$. A countable theory T is *n-categorical*, for natural $n \geq 1$, if T has exactly one n-element model up to isomorphism, i.e. $I(T, n) = 1$. A countable theory T is *finitely categorical* if T is n-categorical for some $n \in \omega \setminus \{0\}$.

The classes of all finitely and ω-categorical theories will be denoted by $\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}$ and $\overline{\mathcal{T}}_{\omega,1}$, respectively.

Let $\mathcal{T}$ be a set (class) of theories in $\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}\cup\overline{\mathcal{T}}_{\omega,1}$ and T a theory in $\mathcal{T}$. By Ryll—Nardzewski theorem, $S^n(T)$ is finite for any n. Then, for any n, classes $\lceil\varphi(\bar{x})\rceil=\{\varphi'(\bar{x})\mid\varphi'(\bar{x})\equiv\varphi(\bar{x})\}$ of T-formulas with n free variables and $\lceil\varphi(\bar{x})\rceil\leq\lceil\psi(\bar{x})\rceil\Leftrightarrow\varphi(\bar{x})\vdash\psi(\bar{x})$ form a finite Boolean algebra $\mathcal{B}_n(T)$ with 2^{m_n} elements, where m_n is the number of n-types of T.

The algebra $\mathcal{B}_n(T)$ can be interpreted as an m_n-cube $\mathcal{C}_{m_n}(T)$, whose vertices form the universe $B_n(T)$ of $\mathcal{B}_n(T)$, edges $[a,b]$ link vertices a and b such that a $\leqslant$-covers b or b $\leqslant$-covers a, and each vertex a is marked by some $u_a\rightleftharpoons\lceil\varphi(\bar{x})\rceil$, where $a\leqslant b\Leftrightarrow u_a\leq u_b$. The label 0 is used for the vertex corresponding to $\lceil\neg\bar{x}\approx\bar{x}\rceil$ and 1 — for the vertex corresponding to $\lceil\bar{x}\approx\bar{x}\rceil$.

Obviously, the sets $\lceil\varphi(\bar{x})\rceil$ and the relation $\leq$ depend on the theory T but we omit T if the theory is fixed or it is clear by the context.

Clearly, algebras $\mathcal{B}_n(T_1)$ and $\mathcal{B}_n(T_2)$, for $T_1,T_2\in\mathcal{T}$, may be not coordinated: it is possible $\lceil\varphi(\bar{x})\rceil<\lceil\psi(\bar{x})\rceil$ for T_1 whereas $\lceil\psi(\bar{x})\rceil<\lceil\varphi(\bar{x})\rceil$ for T_2. If $\lceil\varphi(\bar{x})\rceil<\lceil\psi(\bar{x})\rceil$ for T_1 and $\lceil\varphi(\bar{x})\rceil<\lceil\psi(\bar{x})\rceil$ for T_2, we say that T_2 *witnesses* that $\lceil\varphi(\bar{x})\rceil<\lceil\psi(\bar{x})\rceil$ for T_1 (and vice versa).

At the same time, if a countable theory T_0 does not belong to $\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}\cup\overline{\mathcal{T}}_{\omega,1}$ then $\mathcal{B}_n(T_0)$ is infinite for some $n\geq 1$, and therefore there is a formula $\varphi(\bar{x})$, for instance $(\bar{x}\approx\bar{x})$, such that for the label $u=\lceil\varphi(\bar{x})\rceil$ there is an infinite decreasing chain $(u_k)_{k\in\omega}$ of labels: $u_{k+1}<u_k<u$ witnessed by some formulas $\varphi_k(\bar{x})$. In such case, if $T_0\in{\rm Cl}_E(\mathcal{T})$, then, by Proposition 1.1, for any finite sequence $(u_l,\ldots,u_0,u)$ there are infinitely many theories in $\mathcal{T}$ witnessing that $u_l<\ldots<u_0<u$. In particular, cardinalities m_n for Boolean algebras $\mathcal{B}_n(T)$ and for cubes $\mathcal{C}_{m_n}(T)$ are unbounded for $\mathcal{T}$: distances $\rho_{n,T}(0,u)$ are unbounded for the cubes $\mathcal{C}_{m_n}(T)$, i.e., $\sup\{\rho_{n,T}(0,u)\mid T\in\mathcal{T}\}=\infty$. It is equivalent to take $(\bar{x}\approx\bar{x})$ for $\varphi(\bar{x})$ and to obtain $\sup\{\rho_{n,T}(0,1)\mid T\in\mathcal{T}\}=\infty$.

Thus we have the following

Theorem 14.1. [27]. *Let $\mathcal{T}$ be a class of theories in $\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}\cup\overline{\mathcal{T}}_{\omega,1}$. The following conditions are equivalent:*

(1). ${\rm Cl}_E(\mathcal{T})\not\subseteq\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}\cup\overline{\mathcal{T}}_{\omega,1}$;

(2). *for some natural $n\geq 1$, Boolean algebras $\mathcal{B}_n(T)$, where $T\in\mathcal{T}$, have unbounded cardinalities and, moreover, there is an infinite decreasing chain $(u_k)_{k\in\omega}$ of labels for some formulas $\varphi_k(\bar{x})$ such that any finite sequence $(u_l,\ldots,u_0)$ with $u_l<\ldots<u_0$ is witnessed by infinitely many theories in $\mathcal{T}$;*

(3). *the same as in* (2) *with $u_0=1$.*

Corollary 14.2. [27]. *A class $\mathcal{T} \subseteq \overline{\mathcal{T}}_{\rm fin} \cup \overline{\mathcal{T}}_{\omega,1}$ does not generate, using the E-operator, theories, which are neither finitely categorical nor ω-categorical, if and only if for the Boolean algebras $\mathcal{B}_n(T)$, where $T \in \mathcal{T}$, there are no infinite decreasing chains $(u_k)_{k\in\omega}$ of labels for some formulas $\varphi_k(\bar{x})$ such that any finite sequence $(u_l, \ldots, u_0)$ with $u_l < \ldots < u_0$ is witnessed by infinitely many theories in $\mathcal{T}$.*

Proposition 14.3. [27]. *A class $\mathcal{T}$ of theories of pairwise disjoint languages is E-closed if and only if the following conditions hold:*

(i). *for any $n \in \omega \setminus \{0\}$ whenever $\mathcal{T}$ contains infinitely many theories with n-element models, $\mathcal{T}$ contains the theory T^0_n of the empty language and with n-element models;*

(ii). *if $\mathcal{T}$ contains theories with unbounded finite cardinalities of models or infinitely many theories with infinite models, then $\mathcal{T}$ contains the theory T^0_∞ of the empty language and with infinite models.*

Corollary 14.4. [27]. *A class $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}_{\rm fin} \cup \overline{\mathcal{T}}_{\omega,1}$ of theories of pairwise disjoint languages is E-closed if and only if the conditions* (i) *and* (ii) *hold.*

Corollary 14.5. [27]. *A class $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}$ of theories of pairwise disjoint languages is E-closed if and only if the condition* (i) *holds and there is $N \in \omega$ such that $\mathcal{T}$ does not have n-categorical theories for $n > N$.*

Corollary 14.6. [27]. *A class $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}_{\omega,1}$ of theories of pairwise disjoint languages is E-closed if and only if the condition* (ii) *holds.*

Corollary 14.7. [27]. *For any class $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}_{\rm fin} \cup \overline{\mathcal{T}}_{\omega,1}$ of theories of pairwise disjoint languages, $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ is contained in the class $\subset \overline{\mathcal{T}}_{\rm fin} \cup \overline{\mathcal{T}}_{\omega,1}$, moreover,*

$$\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T} \cup \{T^0_\lambda \mid \lambda \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}\}.$$

Remark 14.8. [27]. Assertions 14.1–14.4, 14.6, 14.7 hold for the operators Cl^d_P and $\mathrm{Cl}^{d,r}_P$ if replacing E-closures by P-closures. As non-isolated types always produce infinite structures, Corollary 14.5 holds only for Cl^d_P with finite sets $\mathcal{T}$ of theories.

15 On approximations of theories with (in)finite models

Definition. [28]. An infinite structure $\mathcal{M}$ is *pseudofinite* if every sentence true in $\mathcal{M}$ has a finite model.

Definition. (cf. [29]). A consistent formula φ *forces* the infinity if φ does not have finite models.

By the definition, an infinite structure $\mathcal{M}$ is pseudofinite if and only if $\mathcal{M}$ does not satisfy formulas forcing the infinity.

We denote the class $\overline{\mathcal{T}}\setminus\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}$ by $\overline{\mathcal{T}}_{\rm inf}$.

Proposition 15.1. [27]. *A theory $T\in\overline{\mathcal{T}}_{\rm inf}$ belongs to some E-closure of theories in $\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}$ if and only if T does not have formulas forcing the infinity.*

Corollary 15.2. [27]. *If a theory $T\in\overline{\mathcal{T}}_{\rm inf}$ belongs to some E-closure of theories in $\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}$ then T is not finitely axiomatizable.*

In fact, in view of Theorem 1.2, the arguments for Corollary 3.3 show that ${\rm Cl}_E(\mathcal{T})$, for a family $\mathcal{T}$ of finitely axiomatizable theories, has the least generating set $\mathcal{T}$ and does not contain new finitely axiomatizable theories.

Note that Proposition 15.1 admits a reformulation for ${\rm Cl}^d_P$ repeating the proof. At the same time, theories in $\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}$ can not be approximated by theories in $\overline{\mathcal{T}}_{\rm inf}$ with respect to ${\rm Cl}_E$ whereas each theory in $\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}$ can be approximated by theories in $\overline{\mathcal{T}}_{\rm inf}$ with respect to ${\rm Cl}^d_P$:

Proposition 15.3. [27]. *For any theory $T\in\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}$ there is a family $\mathcal{T}_0\subset\overline{\mathcal{T}}_{\rm inf}$ such that T belongs to the $\Sigma(T)$-restriction of ${\rm Cl}^d_P(\mathcal{T}_0)$.*

16 e-spectra for finitely categorical and ω-categorical theories

We refine the notions of e-spectra e-${\rm Sp}(\mathcal{A}_E)$ and e-${\rm Sp}(T)$ for the theories $T={\rm Th}(\mathcal{A}_E)$ restricting the class of possible theories to a given class $\mathcal{T}$ in the following way.

For a structure $\mathcal{A}_E$ the number of *new* structures with respect to the structures $\mathcal{A}_i$, i.e., of the structures $\mathcal{B}$ with ${\rm Th}(\mathcal{B})\in\mathcal{T}$, which are pairwise elementary non-equivalent and elementary non-equivalent to the structures $\mathcal{A}_i$, is called the $(e,\mathcal{T})$*-spectrum* of $\mathcal{A}_E$ and denoted by $(e,\mathcal{T})$-${\rm Sp}(\mathcal{A}_E)$. The value $\sup\{(e,\mathcal{T})\text{-}{\rm Sp}(\mathcal{A}'))\mid\mathcal{A}'\equiv\mathcal{A}_E\}$ is called the $(e,\mathcal{T})$*-spectrum* of the theory ${\rm Th}(\mathcal{A}_E)$ and denoted by $(e,\mathcal{T})$-${\rm Sp}({\rm Th}(\mathcal{A}_E))$.

The following properties are obvious.

1. (Monotony) If $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$ then $(e,\mathcal{T}_1)$-${\rm Sp}({\rm Th}(\mathcal{A}_E))\leq(e,\mathcal{T}_2)$-${\rm Sp}({\rm Th}(\mathcal{A}_E))$ for any structure $\mathcal{A}_E$.
2. (Additivity) If the class $\overline{\mathcal{T}}$ of all complete elementary theories of relational languages is the disjoint union of subclasses $\overline{\mathcal{T}}_1$ and $\overline{\mathcal{T}}_2$ then for any theory $T={\rm Th}(\mathcal{A}_E)$,
$$e\text{-}{\rm Sp}(T)=(e,\overline{\mathcal{T}}_1)\text{-}{\rm Sp}(T)+(e,\overline{\mathcal{T}}_2)\text{-}{\rm Sp}(T).$$

We divide a class $\mathcal{T}$ of theories into two disjoint subclasses $\mathcal{T}^{\rm fin}$ and $\mathcal{T}^{\rm inf}$ having finite and infinite non-empty language relations, respectively. More precisely, for functions $f\colon \omega \to \lambda_f$, where λ_f are cardinalities, we divide $\mathcal{T}$ into subclasses $\mathcal{T}^f$ of theories T such that T has $f(n)$ n-ary predicate symbols for each $n\in\omega$.

For the function f we denote by $\mathrm{Supp}(f)$ its *support*, i.e., the set

$$\{n\in\omega\mid f(n)>0\}.$$

Clearly, the language of a theory $T\in\mathcal{T}^f$ is finite if and only if $\rho_f\subset\omega$ and $\mathrm{Supp}(f)$ is finite.

The class $\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}$ is represented as disjoint union of subclasses $\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin,n}$ of theories having n-element models, $n\in\omega\setminus\{0\}$. For $N\in\omega$, the class $\bigcup\limits_{n\leq N}\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},n}$ is denoted by $\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},\leq N}$.

Proposition 16.1. [27]. *For any $\mathcal{T}\subset\overline{\mathcal{T}}$, $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})\setminus\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}\neq\varnothing$ if and only if $\mathcal{T}\not\subset\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},\leq N}$ for any natural N.*

Proposition 16.2. [27]. *If $\mathcal{T}\subset\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},n}$ (respectively $\mathcal{T}\subset\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},\leq N}$) then $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})\subset\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},n}$ ($\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})\subset\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},\leq N}$). For any theory $T=\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$, where all E-classes have theories in $\mathcal{T}$, e-$\mathrm{Sp}(T)=(e,\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},n})$- $\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E))$ (e-$\mathrm{Sp}(T)=(e,\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},\leq N})$-$\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E))$). If, additionally, $\mathcal{T}$ is the set of theories in a finite language then $\mathcal{T}$ is finite (and so E-closed). In particular, for any theory $T=\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ in a finite language, where all E-classes have theories in $\mathcal{T}$, e-$\mathrm{Sp}(T)=0$.*

Proposition 16.3. [27]. *If $\mathcal{T}\cap\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}=\varnothing$ then $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})\cap\overline{\mathcal{T}}_{\rm fin}=\varnothing$.*

Proposition 16.4. [27]. (1) *For any $n\in\omega\setminus\{0\}$ and $\mu\leq\omega$ there is an E-combination $T=\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ of* IILU*-theories $T_i\in\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},n}$ in a language Σ of the cardinality ω such that T has an e-least model and e-$\mathrm{Sp}(T)=\mu$.*
(2) *For any uncountable cardinality λ, there is an E-combination $T=\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ of* IILU*-theories $T_i\in\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},n}$ in a language Σ of cardinality λ such that T has an e-least model and e-$\mathrm{Sp}(T)=\lambda$.*

Proposition 16.5. [27]. *For any $n\in\omega\setminus\{0\}$ and infinite cardinality λ, there is an E-combination $T=\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ of* IILU*-theories $T_i\in\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},n}$ in a language Σ of cardinality λ such that T does not have e-least models and e-$\mathrm{Sp}(T)\geq\max\{2^\omega,\lambda\}$.*

Proposition 16.6. [27]. *For any $n\in\omega\setminus\{0\}$ and infinite cardinality λ, there is an E-combination $T=\mathrm{Th}(\mathcal{A}_E)$ of* LU*-theories $T_i\in\overline{\mathcal{T}}_{{\rm fin},n}$ in a language Σ of cardinality λ such that T does not have e-least models and e-$\mathrm{Sp}(T)=2^\lambda$.*

Remark 16.7. [27]. Considering countable LU-theories for the assertions above we can assume that these theories belong to a class $\mathcal{T}^f$, where $f \in \omega^\omega$ and $\mathrm{Supp}(f)$ is infinite. Note also that Propositions 16.4–16.6 hold replacing the classes $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{fin},n}$ by $\overline{\mathcal{T}}_{\omega,1}$.

Replacing E-classes by unary predicates P_i (not necessary disjoint) being universes for structures $\mathcal{A}_i$ and restricting models of $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$ to the set of realizations of $p_\infty(x)$, we obtain the $(e, \mathcal{T})$*-spectrum* $(e, \mathcal{T})$-$\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P))$, i.e., the number of pairwise elementary non-equivalent restrictions $\mathcal{N}$ of $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$ to $p_\infty(x)$ such that $\mathrm{Th}(\mathcal{N}) \in \mathcal{T}$.

Proposition 16.8. [27]. *If the structures $\mathcal{A}_i$ have pairwise disjoint languages with disjoint predicates P_i then $(e, \overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{fin},n})$-$\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)) \leq 1$ for any natural $n \geq 1$ and $(e, \overline{\mathcal{T}} \setminus \overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{fin}})$-$\mathrm{Sp}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)) \leq 1$.*

Proposition 16.9. [27]. *For any infinite cardinality λ, there is a theory $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_P)$ being a P-combination of theories in $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{fin}}$ and of a language Σ such that $|\Sigma| = \lambda$ and e-$\mathrm{Sp}(T) = 2^\lambda$.*

17 Almost language uniform theories

Definition. [27]. A theory T in a predicate language Σ is called *almost language uniform* or a ALU-*theory*, if for each arity n with n-ary predicates for Σ there is a partition for all n-ary predicates, corresponding to the symbols in Σ, with finitely many classes K such that any substitution preserving these classes preserves T, too. The ALU-theory T is called IIALU-*theory* if it has non-empty predicates and, as soon as there is a non-empty n-ary predicate in a class K, there are infinitely many non-empty n-ary predicates in K and there are infinitely many empty n-ary predicates.

By the definition, any LU-theory is an ALU-theory and any IILU-theory is an IIALU-theory as well.

Since any finite structure can have only finitely many distinct predicates for each arity n, we obtain the following

Proposition 17.1. [27]. *Any theory $T \in \overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{fin}}$ is an* ALU*-theory.*

Replacing LU- and IILU- by ALU- and IIALU- and the arguments for Propositions 16.4–16.6 we have analogs for these assertions attracting expansions of arbitrary theories in $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{fin},n}$. Thus any theory in $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{fin},n}$ can be used obtaining described e-spectra.

18 Families of cardinalities for models of theories in closures

Let $\mathcal{T}$ be a nonempty family of theories in $\overline{\mathcal{T}}$. We denote by $c_E(\mathcal{T})$ (respectively, $c_P(\mathcal{T})$, $c_P^d(\mathcal{T})$, $c_P^{d,r}(\mathcal{T})$) the set of finite cardinalities for models of theories in $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ ($\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T})$, $\mathrm{Cl}_P^d(\mathcal{T})$, $\mathrm{Cl}_P^{d,r}(\mathcal{T})$) and by $\bar{c}_E(\mathcal{T})$ (respectively, $\bar{c}_P(\mathcal{T})$, $\bar{c}_P^d(\mathcal{T})$, $\bar{c}_P^{d,r}(\mathcal{T})$) the set of finite cardinalities for models of theories in $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ ($\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T})$, $\mathrm{Cl}_P^d(\mathcal{T})$, $\mathrm{Cl}_P^{d,r}(\mathcal{T})$) which are not cardinalities for models of theories in $\mathcal{T}$. Additionally, for $\mathrm{Cl}_P(\mathcal{T})$, $\mathrm{Cl}_P^d(\mathcal{T})$, and $\mathrm{Cl}_P^{d,r}(\mathcal{T})$ we denote by $\hat{c}_P(\mathcal{T})$, $\hat{c}_P^d(\mathcal{T})$, $\hat{c}_P^{d,r}(\mathcal{T})$, respectively, the set of finite cardinalities for models of theories being restrictions for corresponding P-combinations to sets of realizations of types $p_\infty(x)$.

Since E-closures preserve finite cardinalities for models of theories in families in $\mathcal{T}$, i.e., $c_E(\mathcal{T})$ consists of these cardinalities for $\mathcal{T}$, we have $\bar{c}_E(\mathcal{T}) \equiv \varnothing$. Thus we can use the notation $c_E(\mathcal{T})$ for the set of finite cardinalities for models of theories in $\mathcal{T}$, or, equivalently, for models of theories in $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$.

If $\mathcal{T}$ is finite or corresponding $p_\infty(x)$ is consistent and there are no models with finitely many realizations for $p_\infty(x)$, then $c_P(\mathcal{T}) = c_P^d(\mathcal{T}) = c_E(\mathcal{T})$ and $\bar{c}_P(\mathcal{T}) = \bar{c}_P^d(\mathcal{T}) = \hat{c}_P(\mathcal{T}) = \hat{c}_P^d(\mathcal{T}) = \varnothing$.

We have $c_P^{d,r}(\mathcal{T}) = \hat{c}_P^{d,r}(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}^+$ and $\bar{c}_P^{d,r}(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}^+ \setminus c_E(\mathcal{T})$.

Taking an infinite family $\mathcal{T}$ in the language Σ_0, we have $c_P(\mathcal{T}) = c_P^d(\mathcal{T}) = c_P^{d,r}(\mathcal{T}) = \hat{c}_P(\mathcal{T}) = \hat{c}_P^d(\mathcal{T}) = \hat{c}_P^{d,r}(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}^+$ and $\bar{c}_P(\mathcal{T}) = \bar{c}_P^d(\mathcal{T}) = \bar{c}_P^{d,r}(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}^+ \setminus c_E(\mathcal{T})$. The latter formula shows that $\bar{c}_P(\mathcal{T})$, $\bar{c}_P^d(\mathcal{T})$, and $\bar{c}_P^{d,r}(\mathcal{T})$ can be arbitrary subsets of $\mathbb{Z}^+$ with infinite complements. Thus we have the following

Proposition 18.1. [27]. *For any infinite set $Y \subseteq \mathbb{Z}^+$ there is a family $\mathcal{T}$ such that $\bar{c}_P(\mathcal{T}) = \bar{c}_P^d(\mathcal{T}) = \bar{c}_P^{d,r}(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}^+ \setminus Y$.*

Theorem 18.2. [27]. *For any nonempty family $\mathcal{T}$, there is $K \subset \omega$ such that $\hat{c}_P^{d,r}(\mathcal{T}) = \biguplus\limits_{k\in K} k\mathbb{Z}^+$.*

Theorem 18.3. [27]. *For any infinite family $\mathcal{T}$ there is $K \subset \omega$ such that $\hat{c}_P^{d}(\mathcal{T}) = \biguplus\limits_{k\in K} k\mathbb{Z}^+$.*

Theorem 18.4. [27]. *For any set $K \subseteq \mathbb{Z}^+$ there is a P-combination T such that $\hat{c}_P(T) = K$.*

Theorem 18.5. [27]. (1) *If T is a P-combination with a type $p_\infty(x)$ isolating a complete 1-type then $\hat{c}_P(T)$ is either empty or contains k_0 such that $\hat{c}_P(T) \subseteq k_0\mathbb{Z}^+$.*

(2) *For any set $K \subseteq k_0\mathbb{Z}^+$, being empty or containing k_0, there is a P-combination T with a type $p_\infty(x)$ isolating a complete 1-type such that $\hat{c}_P(T) = K$.*

19 Families of theories of Abelian groups and their closures

Let A be an Abelian group. Then kA denotes its subgroup $\{ka \mid a \in A\}$ and $A[k]$ denotes the subgroup $\{a \in A \mid ka = 0\}$. If p is a prime number and $pA = \{0\}$ then $\dim A$ denotes the dimension of the group A, considered as a vector space over a field with p elements. The following numbers, for arbitrary p and n (p is prime and n is natural), are called the *Szmielew invariants* for the group A [20]:

$$\alpha_{p,n}(A) = \min\{\dim((p^n A)[p]/(p^{n+1}A)[p]), \omega\},$$

$$\beta_p(A) = \min\{\inf\{\dim((p^n A)[p] \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\gamma_p(A) = \min\{\inf\{\dim((A/A[p^n])/p(A/A[p^n])) \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\varepsilon(A) \in \{0,1\} \,\text{and}\, \varepsilon(A) = 0 \Leftrightarrow (nA = \{0\} \,\text{for some}\, n \in \omega, n \neq 0).$$

It is known [20, Theorem 8.4.10] that two Abelian groups are elementary equivalent if and only if they have same Szmielew invariants. Besides, the following proposition holds.

Proposition 19.1. [20, Proposition 8.4.12]. *Let, for any p and n, the cardinals $\alpha_{p,n}$, β_p, $\gamma_p \leq \omega$, and $\varepsilon \in \{0,1\}$ are given. Then there is an Abelian group A such that the Szmielew invariants $\alpha_{p,n}(A)$, $\beta_p(A)$, $\gamma_p(A)$, and $\varepsilon(A)$ are equal to $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, and ε, respectively, if and only if the following conditions hold:*

(1). *if for prime p the set $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ is infinite then $\beta_p = \gamma_p = \omega$;*

(2). *if $\varepsilon = 0$ then $\beta_p = \gamma_p = 0$ and the set $\{\langle p,n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ is finite. for any prime p.*

We denote by $\mathbf{Q}$ the additive group of rational numbers, $\mathbf{Z}_{p^n}$ — the cyclic group of order p^n, $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ — the quasi-cyclic group of all complex roots of 1 of degrees p^n for all $n \geq 1$, R_p — the group of irreducible fractions with mutually prime with p denominators. The groups $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_{p^n}$, R_p, $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ are called *basic*. Below the notations of these groups will be identified with their universes.

Since Abelian groups with same Szmielew invariants have same theories, any Abelian group A is elementary equivalent to a group

$$\oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \oplus_p \mathbf{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathbf{Q}^{(\varepsilon)},$$

where $B^{(k)}$ denotes the direct sum of k subgroups isomorphic to a group B. Thus, any theory of an Abelian group has a model being a direct sum of based groups.

Recall that any complete theory of an Abelian group is based by the set of positive primitive formulas [20, Lemma 8.4.5], reduced to the set of the following formulas:

$$\exists y(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n \approx p^k y), \tag{7}$$

$$m_1x_1 + \ldots + m_nx_n \approx 0, \tag{8}$$

where $m_i \in \mathbf{Z}$, $k \in \omega$, p is a prime number [20, Lemma 8.4.7]. Formulas (7) and (8) allow to witness that Szmielew invariants defines theories of Abelian groups modulo Proposition 19.1.

Denote by $\overline{\mathcal{TA}}$ the set of all theories of Abelian groups. Below we consider families $\mathcal{T} \subseteq \overline{\mathcal{TA}}$ and corresponding families $\mathcal{T}'$, where constants 0 are replaced by unary predicates P_0 with unique realizations 0, and operations $+$ are replaced by ternary predicates S, where $\models S(a,b,c) \Leftrightarrow a+b=c$. Clearly, each theory $T \in \mathcal{T}$ can be reconstructed by the correspondent theory $T' \in \mathcal{T}'$ and vice versa. So, we can freely replace the closure $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}')$ (and its elements) by the correspondent set of theories of Abelian groups, denoted by $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ (as well as by correspondent theories).

Now, we fix a family $\mathcal{T}$. In view of Proposition 5.2 and the basedness by the set of formulas (7) and (8), we have the following lemmas.

Lemma 19.2. [30]. *A family $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ contains neither theories with new finite invariants $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p nor invariants with new p and n.*

Lemma 19.3. [30]. *A family $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ contains a theory with infinite invariant $\alpha_{p,n}$ if and only if $\mathcal{T}$ contains a theory with that infinite invariant or $\mathcal{T}$ has theories with infinitely many distinct finite invariants $\alpha_{p,n}$.*

Using Proposition 19.1 and Lemma 19.3 we have

Lemma 19.4. [30]. *A family $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ contains a theory with an infinite invariant β_p (respectively, γ_p) if and only if $\mathcal{T}$ contains a theory with that infinite invariant, or $\mathcal{T}$ has theories with infinitely many distinct finite invariants $\alpha_{p,n}$, or $\mathcal{T}$ has theories with infinitely many distinct finite invariants β_p (γ_p).*

Lemma 19.5. [30]. *A family $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ contains a theory with $\varepsilon = 1$ if and only if $\mathcal{T}$ contains a theory with $\varepsilon = 1$, or $\mathcal{T}$ has theories forming infinite set $\{\langle p,n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$, or $\mathcal{T}$ has theories with positive invariants β_p or γ_p.*

Lemmas 19.3–19.5 describe approximations of new infinite Szmielew invariants by finite ones.

Applying Proposition 5.2, the basedness of theories, and Lemmas 19.2–19.5 we can describe E-closures for families of theories of Abelian groups.

For this aim, we recall Proposition 7.1 for language uniform theories: If $T_J \notin \mathcal{T}$ then $T_J \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ if and only if for any finite set $J_0 \subset I_0$ there are infinitely many $T_I \mathcal{T}$ with

$$J \cap J_0 = I \cap J_0. \tag{9}$$

The equations (9) for indexes mean the *local correspondence* between $\mathcal{T}$ and T_J. Using replacements of these index sets by sequences of Szmielew invariants for theories of Abelian groups we obtain the local correspondence for families of theories in $\overline{\mathcal{TA}}$: for a family $\mathcal{T} \subseteq \overline{\mathcal{TA}}$, a theory $T \in \overline{\mathcal{TA}} \setminus \mathcal{T}$ *locally corresponds* to $\mathcal{T}$ if replaced (9) holds modulo infinite Szmielew invariants and, besides, simultaneously the sequence of infinite Szmielew invariants for T, which are not represented in infinitely many theories in $\mathcal{T}$, is approximated by sequences of corresponding finite Szmielew invariants for theories in $\mathcal{T}$ used for replaced (9).

Theorem 19.6. [30]. *If $\mathcal{T}$ is an infinite family of theories of Abelian groups and $T \notin \mathcal{T}$ is a theory of an Abelian group then $T \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ if and only if T has infinite models* (*i.e., T has some infinite $\alpha_{p,n}$ or some positive β_p, γ_p, ε*) *and locally corresponds to $\mathcal{T}$.*

Theorem 6.2, Proposition 19.1, and Theorem 19.6 allow to characterize families of theories of Abelian groups with(out) least generating sets as well as to describe e-spectra (varying from 0 to 2^ω) for E-combinations of theories in $\overline{\mathcal{TA}}$.

20 Further directions

The study of families of theories is connected with approximations of theories [31], rank and degree similar to Cantor—Bendixson and Morley ones [32]. These characteristics are investigated for families of all theories of given languages [33], for definable families of theories [34] and their algebras [35], for families of permutation theories [36], for families of theories of abelian groups [37], for families of ordered theories [38], and for locally free algebras [39]. Rank values for E-closed families can be obtained on a base of classification for sentence Lindenbaum—Tarski algebras [40] as well as on ultraproduct constructions [16, 17].

21 Questions and problems

In the conclusion we shall formulate some additional open problems that are interesting in the context of given results.

1. The problem of descriptions of E-closures and P-closures for families of theories of various natural classes of structures.
2. The problem of descriptions of topological properties, relative to E-operators and P-operators, for families of theories of various natural classes of structures.
3. The problem of decompositions of E-closures and P-closures for families of theories of various natural classes of structures.
4. The problem of descriptions of e-spectra, relative to E-operators and P-operators, for families of theories of various natural classes of structures.
5. The problem of classification of closure operators related to E-operators and P-operators.
6. The problem of descriptions of generating sets and ranks for families of theories of various natural classes of structures.

References

[1] R. E. Woodrow, Theories with a finite number of countable models and a small language, Ph. D. Thesis, Simon Fraser University, 1976, 99 p.

[2] S. V. Sudoplatov, Transitive arrangements of algebraic systems, Siberian Math. J., **40**, 6 (1999), 1347–1351.

[3] S. V. Sudoplatov, Inessential combinations and colorings of models, Siberian Math. J. **44**, 5 (2003), 883–890.

[4] S. V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories, Novosibirsk: NSTU, 2018.

[5] U. Andrews, H. J. Keisler, Separable models of randomizations, J. Symbolic Logic, **80**, 4 (2015), 1149–1181.

[6] J. T. Baldwin, J. M. Plotkin, A topology for the space of countable models of a first order theory, Zeitshrift Math. Logik and Grundlagen der Math, **20**, 8–12 (1974), 173–178.

[7] J. Gismatullin, D. Penazzi, A. Pillay, On compactifications and the topological dynamics of definable groups, Annals of Pure and Applied Logic, **165**, 2 (2014), 552–562.

[8] A. S. Kechris, V. G. Pestov, Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups, Geometric and Functional Analysis, **15**, 1 (2005), 106–189.

[9] L Newelski, Topological dynamics of definable group actions, J. Symbolic Logic, **74**, 1 (2009), 50–72.

[10] A. Pillay, Topological dynamics and definable groups, J. Symbolic Logic, **78**, 2 (2013), 657–666.

[11] S. V. Sudoplatov, Classes of structures and their generic limits, Lobachevskii J. Math, **36**, 4 (2015), 426–433.

[12] S. V. Sudoplatov, P. Tanović, Semi-isolation and the strict order property, Notre Dame Journal of Formal Logic, **56**, 4 (2015), 555–572.

[13] S. V. Sudoplatov, Combinations of structures, `arXiv:1601.00041v1 [math.LO]`, 2016, 19 p.

[14] L. Henkin, Relativization with respect to formulas and its use in proofs of independence, Composito Mathematica, **20** (1968), 88–106.

[15] S. V. Sudoplatov, Closures and generating sets related to combinations of structures, Reports of Irkutsk State University. Series "Mathematics", **16** (2016), 131–144.

[16] P. Bankston, Ultraproducts in topology, General Topology and its Applications, **7**, 3 (1977), 283–308.

[17] P. Bankston, A survey of ultraproduct constructions in general topology, Topology Atlas Invited Contributions, **8**, 2 (2003), 1–32.

[18] C. C. Chang, H. J. Keisler Model theory, Amsterdam : Elsevier, 1990, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 73, 650 p.

[19] R. Engelking, General topology, Berlin: Heldermann Verlag, 1989, 529 p.

[20] Yu. L. Ershov, E. A. Palyutin, Mathematical logic, Moscow: FIZMATLIT, 2011, 356 p.

[21] S. V. Sudoplatov, Group polygonometries, Novosibirsk: NSTU, 2011, 2013, 302 p. (Russian).

[22] S. V. Sudoplatov, Models of cubic theories, Bulletin of the Section of Logic, **43**, 1 (2014), 19–34.

[23] S. V. Sudoplatov, Families of language uniform theories and their generating sets, Reports of Irkutsk State University. Series "Mathematics", **17** (2016), 62–76.

[24] S. V. Sudoplatov, Relative *e*-spectra, relative closures, and semilattices for families of theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 296–307.

[25] S. V. Sudoplatov, On semilattices and lattices for families of theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 980–985.

[26] S. Burris, H. P. Sankappanavar, A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag, New York, 2011.

[27] S. V. Sudoplatov, Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14**, (2017), 135–150.

[28] E. Rosen, Some Aspects of Model Theory and Finite Structures, The Bulletin of Symbolic Logic, **8** (2002), 380–403.

[29] S. V. Sudoplatov, Forcing of infinity and algebras of distributions of binary semi-isolating formulas for strongly minimal theories, Mathematics and Statistics, **2** (2014), 183–187.

[30] In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov, Families of theories of abelian groups and their closures, Bulletin of Karaganda University, Mathematics, **92**, 4 (2018), 72–78.

[31] S. V. Sudoplatov, Approximations of theories, `arXiv:1901.08961v1 [math.LO]`, 2019, 16 p.

[32] S. V. Sudoplatov, Ranks for families of theories and their spectra, `arXiv:1901.08464v1 [math.LO]`, 2019, 17 p.

[33] N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, Ranks for families of all theories of given languages, `arXiv:1901.09903v1 [math.LO]`, 2019, 9 p.

[34] N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, Definable families of theories, related calculi and ranks, arXiv:1901.11011v1 [math.LO], 2019, 20 p.

[35] N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, Algebras for definable families of theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 600–608. DOI/ 10.33048/semi.2019.16.037.

[36] N. D. Markhabatov, Ranks for families of permutation theories, The Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics, **28** (2019), 85–94. `https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.85`

[37] In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov, Ranks for families of theories of abelian groups, The Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics, **28** (2019), 95–112. DOI: `https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.95`

[38] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, Ranks and approximations for families of ordered theories, Algebra and Model Theory 12, Collection of papers, eds. A. G. Pinus, E. N. Poroshenko, S. V. Sudoplatov, Novosibirsk: NSTU, 2019, 32–40.

[39] N. D. Markhabatov, Pseudofiniteness of locally free algebras, Algebra and Model Theory 12, Collection of papers,eds. A. G. Pinus, E. N. Poroshenko, S. V. Sudoplatov, Novosibirsk: NSTU, 2019, 41–46.

[40] D. Myers, Lindenbaum—Tarski Algebras, Handbook of Boolean Algebras, Vol. 3, eds. J. D. Monk, R.,Bonnet, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo: Nort-Holland, 1989, 1167–1195.

СУПЕРАЛГЕБРЫ ГЕЛЬФАНДА — ДОРФМАН — НОВИКОВА — ПУАССОНА И ИХ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ

А. С. Захаров

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2, 630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный технический университет,
пр-т К.Маркса, 20, 630073, Новосибирск, Россия
e-mail: antzakh@gmail.com

Алгебры Гельфанда — Дорфман — Новикова ($\mathcal{GDN}$-алгебры) были введены в работах И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман [1] и в работе А. А. Балинского и С. П. Новикова [2]. В литературе встречалось название алгебр Новикова, Л. А. Бокуть и Е. И. Зельманов предложили добавить фамилии И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфмана к названию ввиду того, что их работа была раньше. К. Ксу [3] ввел понятие алгебр Гельфанда — Дорфман — Новикова — Пуассона ($\mathcal{GDNP}$-алгебры) для изучения простых $\mathcal{GDN}$-алгебр.

Все примеры алгебр Гельфанда — Дорфман — Новикова и Гельфанда — Дорфман — Новикова — Пуассона, полученные в указанных выше работах, получались из ассоциативных коммутативных алгебр с дифференцированием. А. С. Джумадильдаев и К. Лофволл [4] нашли базис свободной алгебры Гельфанда — Дорфман — Новикова. С помощью этой работы З Жанг, Ю. Чен и Л. А. Бокуть [5] доказали, что любая супералгебра Гельфанда — Дорфман — Новикова вкладывается в строгую алгебру Гельфанда — Дорфман — Новикова векторного типа. Были обобщены результаты работ [6],[7] для $\mathcal{GDNP}$-супералгебр.

Скажем, что $\langle A, \circ\rangle$ — $\mathcal{GDN}$-супералгебра, если для однородных элементов имеют места тождества

$$(x\circ y)\circ z = (-1)^{|y||z|}(x\circ z)\circ y; \tag{1}$$

$$(x\circ y)\circ z - x\circ(y\circ z) = (-1)^{|x||y|}\Big((y\circ x)\circ z - y\circ(x\circ z)\Big). \tag{2}$$

Супералгебра $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ является обобщенной супералгеброй Гельфанда — Дорфман — Новикова — Пуассона ($g\mathcal{GDNP}$-супералгеброй), если

$$xy \circ z = x(y \circ z) \tag{3}$$

$$(-1)^{|y||z|} xz \circ y - x \circ yz = (-1)^{|x||y|+|x||z|} yz \circ x - (-1)^{|x||y|} y \circ xz. \tag{4}$$

Супералгебра $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ является $\mathcal{GDNP}$-супералгеброй, если $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$-супералгебра и $\langle A, \circ \rangle$ — $\mathcal{GDN}$-супералгебра.

Пример 2. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра и D — четное дифференцирование, то есть $D(A_i) \subseteq A_i$, и для однородных элементов имеет место $D(ab) = aD(b) + D(a)b$, где $\lambda \in A_0^{\#}$ и $A_0^{\#} = A_0 + F \cdot 1$ — алгебра с присоединенной единицей. Тогда положим

$$a \circ b = aD(b) + \lambda ab. \tag{5}$$

Получим $\mathcal{GDNP}$-супералгебру $\langle A, \cdot, \circ \rangle$, которую будем обозначать $GDNP(A, D, \lambda)$ и называть $\mathcal{GDNP}$-супералгеброй векторного типа. Алгебру $GDNP(A, D, 0)$ будем называть строгой $\mathcal{GDNP}$-супералгеброй векторного типа.

Теорема 3. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$-супералгебра и x не делитель нуля в $\langle A, \cdot \rangle$. Тогда $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ вложима в $\mathcal{GDNP}$-супералгебру векторного типа и, в частности, сама является $\mathcal{GDNP}$-супералгеброй.*

Пусть $\langle A = A_0 + A_1, \cdot \rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра и $\{\, , \}$ — суперкососимметрическая билинейная форма, которую мы будем называть скобкой. Тогда рассмотрим $J = A + A\xi$, где $A\xi$ — изоморфная копия A. Тогда положим новое умножение следующим образом:

$$a \bullet b = ab, \quad a \bullet b\xi = ab\xi, \quad a\xi \bullet b = (-1)^{|b|} ab\xi, \quad a\xi \bullet b\xi = (-1)^{|b|}\{a, b\}. \tag{6}$$

Градуировку определим так, что $J_0 = A_0 + A_1\xi, J_1 = A_1 + A_0\xi$. Обозначим супералгебру $\langle J, \bullet \rangle$ через $J(A, \{\, , \})$ и будем называть ее *Дублем Кантора.* Если $J(A, \{\, , \})$ — йорданова супералгебра, то скобка $\{\, , \}$ называется йордановой.

Для $g\mathcal{GDNP}$–супералгебры положим

$$\{a, b\} = a \circ b - (-1)^{|a||b|} b \circ a$$

и рассмотрим Дубль Кантора для этой скобки обозначим $J(A, \{\, , \})$.

Теорема 4. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$-супералгебра. Тогда $J(A, \{\, , \})$ — специальная йорданова супералгебра.*

Список литературы

[1] I. M. Gel'fand, I. Ya. Dorfman, Hamiltonian operators and algebraic structures related to them, Functional Analysis and Its Applications, **13**, 4 (1979), 248–262.

[2] A. A. Balinskii, S. P. Novikov, Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras, and Lie algebras, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **283**, 5 (1985), 1036–1039.

[3] X. Xu, Novikov-Poisson algebra, J. Algebra, **190**, 2 (1997), 253–279.

[4] A. S. Dzhumadildaev and C. Lofwall, Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities, Homology, Homotopy and Applications, **4**, 2 (2002), 165–190.

[5] Z. Zhang, Y. Chen, L. A. Bokut, On Free Gelfand—Dorfman—Novikov Superalgebras and a PBW Type Theorem, International Journal of Algebra and Computation., **29**, 3 (2019), 481–505.

[6] A. S. Zakharov, Embedding Novikov—Poisson algebras in Novikov—Poisson algebras of vector type, Algebra and Logic, **52**, 3 (2013), 236–149.

[7] V. N. Zhelyabin, A. S. Zakharov, Speciality of Jordan superalgebras allied to Novikov—Poisson algebras, Mat. zametki, **97**, 3 (2015), 359–367. (Russian)

Abstracts

A. N. Borodin. *To the theory of homogroups.*

We describe phenomenologically symmetrical small order algebras of rank 3 which are constructs on the base of homogroups.

D. Y. Emelyanov. *Algebras of binary isolating formulas for theories of Cartesian products of graphs.*

Algebras of binary isolating formulas for theories of Cartesian products of graphs.

B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov. *Ranks and approximations for families of ordered theories.*

Ranks and approximations for families of ordered theories are considered. Criteria for both pseudofiniteness and pseudo-$\aleph_0$-categoricity of an infinite linear ordering are found. Also, it is established that the family of all weakly o-minimal theories of pure linear order is not e-totally transcendental.

N. D. Markhabatov. *Pseudofiniteness of locally free algebras.*

We prove that a locally free algebra is pseudofinite if and only if the language contains at most one unary functional symbol and does not have symbols of arity at least two. Topological properties of locally free algebras are studied.

M. Mpournazos, P. Stefaneas. *On arguments, fallacies and critical validity.*

In this short article, we propose a formal definition for the concept of argument following the dialectical tradition in argumentation theory. Following this tradition we define arguments in a manner which allows for their critical evaluation. Moreover, we form our definition in a way which allows for the consideration of fallacious argumentation, contrary to the standard direction which is usually adopted in argumentation logic. Finally, we define the concept of a dialectical proof, by adapting the intuition guiding the standard definition of formal proofs to the norm of critical validity.

A. G. Pinus. *Universal algebra and functional clones (on the scales of universal algebras of fixed power.*

We consider the problems connected to the classification of universal algebras by a help of clones of its termal functions.

A. G. Pinus. *On collections of algebraic sets on universai algebras.*

We give a criterion when a collection of subsets of Cartesian products in some set is a collection of an algebraic sets of some universal algebra.

E. N. Poroshenko, E. I. Timoshenko. *Survey on partially commutative metabelian groups and partially commutative (metabelian) Lie algebras.*
This work is a survey of results obtained for partially commutative metabelian groups and partially commutative (metabelian) Lie algebras.

S. V. Sudoplatov. *Combinations of structures and of their theories (an informative survey).*
We study combinations of structures and of theories by families of structures relative to families of unary predicates and equivalence relations. Structural and topological results for families of theories and their generations with respect to closure operators are collected. The notions of e-spectra are introduced and possibilities as well as their dynamics are described.

A. S. Zakharov. *Gelfand—Dorfman—Novikov—Poisson superalgebras and their envelopes.*
We prove some result of GDNP-algebras for GDNP-superalgebras and embedding some GDNP-superalgebras into GDNP-superalgebras of vector type. Also we prove that not every GDNP-superalgebra can be embeded into associative supercommutative superalgebras with even derivation D and product given by $a \circ b = aD(b)$.

Содержание

ALGEBRA AND MODEL THEORY 12

Collection of papers

Edited by *A. G. Pinus, E. N. Poroshenko,*
S. V. Sudoplatov

Technical editor *E. N. Poroshenko*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции.
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Периодичность 1 раз в 2 года
Подписано к печати 15.11.2019. Формат 70×108 1/16. Бумага офсетная
Тираж 100 экз. Уч.-изд. л. 11,9. Печ. л. 8,5. Изд. № 98. Заказ № 1561.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20